

Особенности применения арифметических задач для устного счета в пособиях педагогов С.А. Рачинского и А.Ф. Малинина

Specific features of the application of arithmetic problems for mental calculation in the manuals of teachers S.A. Rachinsky and A.F. Malinin

УДК 372

DOI: 10.12737/2500-3305-2025-10-5-40-46

Жаров С.В.

Канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры методики преподавания естественно-математических дисциплин в начальной школе, ФГБОУ ВО «Ярославский государственный педагогический университет им. К.Д. Ушинского», г. Ярославль
e-mail: szharv@rambler.ru

Zharov S.V.

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Department of Methods of Teaching Natural Sciences and Mathematics in Primary School, Yaroslavl State Pedagogical University named after K.D. Ushinsky, Yaroslavl
e-mail: szharv@rambler.ru

Аннотация

В статье рассмотрены возможности использования педагогических идей формирования навыков устного счета по известным пособиям ученых-методистов конца XIX в. С.А. Рачинского и А.Ф. Малинина. Опубликованные авторами работы являются не только методическим ориентиром, но и неисчерпаемым кладом практических заданий для современной школы.

Ключевые слова: педагогика, начальная и средняя школа, арифметика, навыки устного счета, приемы устного счета.

Abstract

The article considers the possibilities of using of pedagogical ideas for the formation of mental calculation skills based on the well-known manuals of methodologists of the late part of 19th century S.A.Rachinsky and A.F.Malinin. The works published by the authors are not only a methodological guideline, but also an inexhaustible storehouse of practical tasks for modern schools.

Keywords: pedagogy, primary and secondary schools, arithmetic, mental calculation skills, mental calculation techniques.

Современная педагогика постоянно ищет пути активизации образования в начальной и средней школе, об этом говорят многочисленные стандарты и рабочие программы [10]. Однако нельзя забывать, что многие педагогические проблемы и идеи уходят корнями в прошлое. Этому вопросу уделялось достаточно большое внимание в педагогической практике прошедших столетий. Поставим вопрос, в настоящее время умеем ли мы также быстро и рационально считать, как это было принято буквально немногим более ста лет назад? Ответить будет очень трудно, так как цифровые технологии сильно испортили наши вычислительные навыки. Обратимся к историческим решениям этой проблемы.

Среди авторитетных педагогов XIX-XX вв. можно выделить выдающегося русского ученого, просветителя науки, профессора Московского университета, ботаника и математика Сергея Александровича Рачинского, который посвятил более 30 лет своей жизни разносторонней педагогической деятельности с детьми в сельской школе, а также известного педагога-методиста, основателя и первого директора московского педагогического института Александра Федоровича Малинина. Они посвятили устному счету отдельные учебные пособия, которые выдержали несколько изданий.

Исследованию православной педагогики С.А. Рачинского были посвящены различные научные статьи и выступления на конференциях, написана кандидатская диссертация, в которой школа С.А. Рачинского исследуется как целостная педагогическая система [1]. Духовно-нравственным корням этой системы также посвящена подробная статья [3] и книга Н.М. Горбова [2].

С.А. Рачинский был убежденным сторонником классического образования. И для народной сельской школы он, прежде всего, значение придавал изучению арифметики, особенно устному счету. В своем труде «Сельская школа» он указал, что навыки устного счета в дальнейшем положительно проявляются во многих отраслях знаний и в овладении различными профессиями, это ясно видно из широкой известности выпускников школы Рачинского. Он даже написал специальный учебник «1001 задача для умственного счета» [9], вышедший при его жизни тремя изданиями. Под умственным счетом предполагается обычный устный счет. В настоящее время появились переиздания этого ценного пособия.

Приведем несколько замечаний по развитию навыков устного счета в системе преподавания арифметики школы С.А. Рачинского. Основным трудом Сергея Александровича был уникальный сборник статей под названием «Сельская школа» [8], где излагаются основные методические особенности работы татевской школы.

Приведем одно из высказываний С.А. Рачинского: «Посторонних посетителей, изредка заглядывающих в мою школу, всего более поражает умственный счет ее учеников. Та быстрота и легкость, с которой они производят в уме умножения и деления, обращаются с мерами квадратными и кубическими, соображают данные сложные задачи, то радостное оживление, с которым они предаются этой умственной гимнастике, наводят на мысль, что в этой школе употребляются особые усовершенствованные приемы для преподавания арифметики, что я обладаю в этом отношении каким-то особым искусством или секретом.

Ничто не может быть ошибочней этого впечатления. Конечно, *теперь* я владею некоторым навыком к умственному счету, могу импровизировать арифметические задачи в том быстром темпе, в котором они решаются моими учениками. Но до этих скромных умений довели меня или, лучше сказать, домучили сами ученики» [8].

Будучи незаурядным человеком, С.А. Рачинский сначала сам прекрасно изучил свойства чисел, их делимость, свойства простых чисел. Главным в преподавании он считал знакомство с числами, т.е. ясное сознание их состава из первичных множителей, умение представлять числа из различных слагаемых или в произведение различных множителей. Практически он активно занимался и владел основами теории чисел.

В своей статье «Арифметические забавы» [7] С.А. Рачинский указывает довольно оригинальные способы работы с числами, например, устное умножение на число, записанное только одними девятками, возведение в квадрат. Рассмотрим несколько интересных правил из этой статьи.

Правило умножения одними девятками. Для того, чтобы найти произведение числа, написанного одними девятками, на число, имеющее с ним одинаковое количество цифр, надо от первого множителя «отнять» единицу и к получившемуся числу приписать «подряд дополнители до девятки всех его цифр» [7].

Приведем примеры:

$$7 \cdot 9 = 63$$

$$37 \cdot 99 = 36|63$$

$$127 \cdot 999 = 126|873 \text{ и т.д.}$$

Покажем этот способ в общем виде для двузначных чисел, исходя из конечного результата. Пусть дано число $M=10x+y$. Тогда запишем:

$$x10^3 + (y-1)10^2 + (9-x)10 + (10-y) = 1000x + 100y - 100 + 90 - 10x + 10 - y = 990x + 99y = (10x + y)(100 - 1) = (10x+y) \cdot 99.$$

Правило перемножения чисел, симметрически расположенных (сумма цифр равна 10) в пределах одного десятка или разных десятков. Предположим, надо умножить 13 на 17, для этого нужно умножить 10 на 20 и прибавить произведение чисел 3 и 7. При умножении чисел, расположенных в разных десятках, необходимо следующее видоизменение. Чтобы умножить, например, 13 на 27 необходимо умножить 10 на 30 и сложить с произведением $3 \cdot (27 - 10)$.

Докажем приведенные два примера в общем виде.

$$(10 + x)(20 - x) = 10 \cdot 20 + 20x - 10x - x^2 = 10 \cdot 20 + 10x - x^2 = 10 \cdot 20 + x(10 - x).$$

$$(10 + x)(30 - x) = 10 \cdot 30 + 30x - 10x - x^2 = 10 \cdot 30 + 20x - x^2 = 10 \cdot 30 + x(20 - x).$$

В пределах 100 данное правило выполнимо всегда. Представляет интерес рассмотреть подобную задачу для трехзначных чисел. Аналогично запишем еще один пример такого умножения: $38 \times 52 = 30 \times 60 + 8 \times (52 - 30) = 1976$.

Правило возведения в квадрат двузначных чисел в пределах первой сотни при условии, что в памяти известны квадраты чисел до 25. Для этого необходимо взять сто раз избыток этого числа над 25 и прибавить квадрат его дополнения до 50 (или избытка над 50).

Примеры:

$$37^2 = 1200 + 13^2 = 1369, 58^2 = 3300 + 8^2 = 3364.$$

Этот способ возведения в квадрат также можно доказать в общем виде. Пусть дано число $M=10x+y$. Тогда запишем следующее выражение:

$$(10x+y-25)100 + (50-(10x+y))^2 = 1000x + 100y - 2500 + 2500 + 100x^2 + y^2 - 1000x - 100y + 20xy = 100x^2 + 20xy + y^2 = (10x + y)^2.$$

В настоящее время трудно себе представить, что дети это все считали устно!

В указанной статье С.А. Рачинского можно найти много полезного материала, связанного с признаками делимости натуральных чисел, которые представлены в пособиях старших классов общеобразовательной школы.

В качестве дополнительных замечаний для быстрого устного счета можно выделить так называемые «последовательности Рачинского», которые дают интересные знания о закономерностях суммы квадратов натуральных чисел. Приведем примеры таких закономерностей:

- $3^2 + 4^2 = 5^2$ (обе суммы равны по 25);
- $10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$ (суммы равны по 365);
- $21^2 + 22^2 + 23^2 + 24^2 = 25^2 + 26^2 + 27^2$ (суммы по 2030);
- $36^2 + 37^2 + 38^2 + 39^2 + 40^2 = 41^2 + 42^2 + 43^2 + 44^2$ (что равняется 7230).

Чтобы найти любую другую последовательность Рачинского, достаточно просто составить уравнение следующего вида, при этом всегда в такой последовательности, что количество суммируемых квадратов справа на один меньше, чем слева:

$$n^2 + (n+1)^2 = (n+2)^2.$$

Это уравнение дает известную первую строчку последовательностей.

Вторая последовательность дает ответ на решение задачи с известной картины Н.М. Богданова-Бельского о нахождении суммы чисел.

Общее уравнение имеет вид:

$$n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 = (n+3)^2 + (n+4)^2,$$

решая которое получим числа 10, 11, 12, 13, 14 и задачу известной картины:

$$\frac{10^2 + 11^2 + 12^2 + 13^2 + 14^2}{365} = 2.$$

Зная знаменитые последовательности Рачинского, многие вычисления можно произвести быстрее, чем решать их письменно. В своем сборнике «Сельская школа» [8] С.А. Рачинский особо выделяет умение знакомства с натуральными числами. Он пишет:

«Мною давно замечено, что огромное большинство учителей затрудняется изобретением сколько-нибудь сложных арифметических задач. Происходит это не от недостатка воображения и изобретательности, а от недостаточного *знакомства с числами*. Для учителя, например, не безразлично, что число 40 не только $= 2^3 \cdot 5$, но также $= 3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3$, что 365 не только $5 \cdot 73$, т.е. $5 \cdot (8^0 + 8^1 + 8^2)$, но также $= 10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2 = (17^2 + 21^2) / 2$ и т.д.

Пишущий эти строки, приступивший к преподаванию арифметики на пятом десятке своих лет, приобрел его довольно быстро следующими двумя простыми приемами. Он поставил себе за правило решать в уме, во время уроков всякую письменную задачу, решаемую учениками, – и разлагать в уме на первоначальные множители всякое число, не слишком крупное, попадающееся ему на глаза. Само собой разумеется, что в молодые годы знакомство с числами приобретает гораздо легче, чем в возрасте зрелом» [8].

В задачнике С.А. Рачинского [9] не просто даны задачи на вычисление, но они имеют разнообразное практическое содержание, чтобы развивались навыки работы с различными жизненными ситуациями и единицами измерения величин. Приведем несколько простых задач и их ответы для самопроверки.

1. Поезд проезжает версту в 1 м. 30 с. Во сколько времени может он проезжать 1000 верст? – 25 ч.

2. Выехал из деревни крестьянин и едет по 6 верст в час. Через 2 часа выезжает за ним другой и проезжает по 9 верст в час. Через сколько времени он догонит первого? – Через 4 часа.

3. Выехал из деревни крестьянин и проезжает в час по 8 верст. Через 3 часа выезжает другой. По сколько верст должен он ехать в час, чтобы нагнать первого через 12 часов? – По 10 верст.

4. Некто тратит 40 к. в день. Сколько он тратит в год? – 146 р.

5. Некто поехал в город и взял с собою 3 р. Прожил он в городе неделю и задолжал 1 коп. Сколько он тратил? – 43 коп.

6. Машина изготавливает по листу бумаги в минуту. Сколько стоп (по 480 листов) она изготовит в неделю? – 21.

7. Живописец в 2 ч. 5 м. написал маленький портрет и получил за него 30 р. Сколько он зарабатывал в минуту? – 24 к.

8. Два писца берутся переписать 180 листов: один в 36 дней, другой в 45. Во сколько дней перепишут они их вместе? – 20.

9. Нужно проверить 360 тетрадей диктанта. Один учитель может проверить их в 15 часов, другой в 10 часов, третий в 6 часов. Во сколько времени проверят они тетради втроем? – В 3 часа.

10. Между двумя городами 51 верста. Вышли из них одновременно друг другу два путника. Один проходит в час 4 версты, другой по 4,5. Через сколько часов они встретятся? – 6.

11. Между двумя городами 150 верст. Из них выехали одновременно друг другу навстречу двое. Один проезжает в час 6, другой 6,5 верст. Через сколько часов они встретятся? – 12.

12. У меня было 54 пряника, и я каждый день съедал по 4 с половиной. На сколько дней хватило? – 12.

13. Некто каждую неделю зарабатывает 36 р., а в год тратит 672 р. Сколько он откладывает в месяц? – 100 р.

14. Приказчик служил у купца 2 года. Год с месяцем он получал по 19 р. в месяц; затем стал получать по 23 р. в месяц. Сколько заработал он в эти два года? – 500 р.

Все задачи сборника предназначались для устного счета, в них применялись старые русские единицы измерений длины и площади, но в современной школьной практике их легко можно изменить на привычные единицы измерения. Главное состоит в выработке вычислительных навыков.

Другим достаточно известным педагогом последней четверти XIX в. был первый директор и основатель Московского учительского института Александр Федорович Малинин. За длительную педагогическую деятельность он активно стимулировал к творчеству современных ему преподавателей математики. С этим ученым связана большая цепочка учебных пособий в соавторстве с Константином Петровичем Бурениным. (У старшего поколения выпускников школ была фраза, что учились по «Малинину-Буренину» и получали вполне надежные арифметические знания.) В 1866 г. А.Ф. Малинин совместно с К.П. Бурениным опубликовал «Руководство арифметики» [4] и «Собрание арифметических задач» [5]. Многолетняя педагогическая практика в гимназиях Москвы, Твери и Тулы позволила создать пособия, которые выдержали большое количество изданий.

Представляет особый интерес упомянуть о книге А.Ф. Малинина – «Задачи для умственных вычислений» [6], которая дополняет общий курс арифметики. В ней представлено около трех тысяч задач и примеров на отработку вычислительных навыков по математике. Собрана большая коллекция примеров на вычисление, но вместе с тем приводятся задачи, имеющие различное практическое содержание.

Весь сборник условно разделен на несколько разделов: числа до десяти, числа до ста, числа до тысячи, числа до миллиона и еще добавлен раздел действий с дробями.

Примеры первого раздела – самые простые, приведем несколько таких задач, даже такие задание могут вызвать трудности в младших классах [6].

1. Отец дал трем сыновьям полторы дюжины яблок. Сколько досталось каждому?
2. Отец дал во вторник сыну двугривенный (20 копеек). Сын тратил каждый день по 4 копейки на завтрак. Когда он истратит последние деньги?
3. Из 11 лошадей сколько можно запрячь двоек? Троек?
4. Из каких трех равных чисел состоит 6? Из каких трех неравных?
5. Шесть башмаков составляют сколько пар?
6. Что больше половина восьми или четверть восьми? Четверть восьми, треть шести или половина четырех?

Этот раздел содержит 364 задачи, они отрабатывают навыки знания таблицы умножения, которая сейчас теряет свою актуальность из-за технических совершенств, а также свойства арифметических операций.

Самый большой раздел книги – второй, в нем собраны почти тысяча различных упражнений, имеющий четкую методическую направленность на развитие вычислительных навыков, включая их практическое содержание. Из этих примеров легко можно составлять различные математические диктанты, математические соревнования на скорость вычислений, на внимательность.

Приведем несколько примеров [6].

1. Я купил 6 десятков огурцов. Сколько это составляет штук?
2. Сколько десятков составляют 50 яблок?
3. Если к числу, составленному из 9 десятков и 9 единиц прибавить одну единицу, то какое число получится?
4. Сколько надо прибавить к утроенному числу 2, чтобы получилось 11?
5. Сколько надо вычесть из ушестеренного числа 3, чтобы получить 11?
6. Во сколько времени надо проходить 15 верст, если проходить по 3 версты в час?

Представленный сборник рассчитан практически на весь курс арифметики, поэтому там присутствуют примеры на различные виды дробей, включая десятичные. Выделим одну особенность курса математики прошлых лет – первые пять лет обучения в школе алгебраические символы вообще не вводились, и ученики знакомились только со свойствами арифметических действий, с правилами арифметики и с решением текстовых задач.

В разделе чисел до тысячи составлено всего 194 задачи, они также носят методическую направленность развития вычислительных способностей и знания состава числа.

1. Я сложил два числа, из которых одно в 10 раз больше другого, и получил 550. Какие это числа?

2. Треть некоторого числа равна 150? Чему равно число?
3. Мальчик имел 175 двухкопеечных монет. Сколько у него было денег?
4. Найти число, от которого $\frac{3}{4}$ составляют 120? От которого $\frac{2}{3}$ составляют 240? От которого $\frac{3}{8}$ равно 180?
5. Я сложил два числа, из которых одно вдвое больше другого, и получил 600. какие числа я складывал?

Четвертый раздел также не является многочисленным по количеству задач (всего 195 задач) и относится к числам до миллиона, при этом присутствие обыкновенных и десятичных дробей ограничивает их применение в начальных классах. Приведем примеры задач, которые можно применить в начальной школе [6].

1. Сумма двух чисел равна 600; одно число на 40 больше другого. Найти эти числа.
2. Найти два числа, сумма которых 800, а разность 60.
3. Сумма двух чисел 900; одно из них в 9 раз больше другого. Найти эти числа.
4. Купец потерял четверть своего состояния, и у него осталось 12000 рублей. Сколько денег у него было и сколько он потерял?
5. Сложены два числа, из которых одно составляет половину другого. Какие это числа?
6. Я задумал число; если его удвоить и прибавить еще 100, то получится 500. какое число я задумал?
7. Путешественник отправился в дорогу с 500 руб.; через 12 дней у него осталось 240 руб. Сколько он тратил в день?
8. Брат и сестра имеют вместе 1000 рублей денег, но у брата втрое было втрое меньше, чем у сестры. Сколько было у каждого?
9. Я задумал число. Если к $\frac{1}{2}$ его прибавить 500, то выйдет 5000. какое число я задумал?
10. Найти число, которого $\frac{4}{5}$ составляют 100?
11. Найти число, которого $\frac{9}{10}$ составляют 450?
12. Найти число, которого $\frac{5}{6}$ составляют 420?

Такие примеры активно развивают мыслительные процессы и часто используются в качестве подготовительной ступени для объяснения нового материала и решения трудных арифметических задач. Вместе с тем они являются своего рода арифметической тренировкой для более сложных вычислений.

Последний раздел классически отражает работу с дробями. Эти примеры предусматривают знание основных свойств операций над дробями. Предложенные 264 задачи помогут выработать вычислительные навыки, при этом необходимо применить и некоторую сообразительность при нахождении результата. Все задачи расположены так, что числовые примеры идут попеременно с практическим содержанием.

1. Треть некоторого числа есть $11\frac{1}{2}$; какое это число?
2. Из половины числа вычли $10\frac{1}{2}$ и получили 10. Какое это число?
3. На сколько дней хватит 9 рублей, если тратить по $1\frac{1}{2}$ руб. в день?
4. Когда было 10 минут 11-го, я уже сидел $4\frac{1}{2}$ часа за работой. Когда я сел за работу?
5. Найти число, $\frac{5}{6}$ которого составляют 50?
6. Разделить 100 рублей между двумя братьями так, чтобы младший получил вдвое больше старшего.
7. Дом, стоящий 15000 рублей, продан с 50% прибылью. Сколько получено за дом?
8. Билет из одного города в другой или обратно стоит 5 руб. 20 коп., но если взять билет туда и обратно, то делается скидка 20%. Сколько стоит билет туда и обратно?

Из приведенного небольшого обзора интересных задач на устный счет можно сделать вывод, что они имеют большое значение в изучении всего курса арифметики, а данный сборник А.Ф. Малинина является ценной методической находкой для работы учителя в современной школе. Поскольку у студентов также возникают проблемы с «умственными» вычислениями, неплохо бы и в вузе ввести небольшой практикум по приобретению навыков устного счета параллельно с учебными курсами на компьютере.

Древнегреческий математик - философ, живший в IV в. до н.э., – Пифагор писал: «Всё есть число!». Это высказывание актуально и сегодня. Таким образом, учебные пособия профессора С.А. Рачинского и А.Ф. Малинина положили начала особому направлению в преподавании арифметики, которое может быть охарактеризовано следующим образом: при изложении того или иного математического материала на уроке или в учебнике не следует отклоняться от научной строгости объяснений и доказательств, но в то же время их следует делать доступными и вполне понятными соответствующему ученику.

Литература

1. Багге М.Б. Школа С.А. Рачинского как педагогическая система // Дис. канд. пед. наук: 13.00.01: СПб., 1999.- 206 с.
2. Горбов Н.М. С.А. Рачинский. - СПб, 1903.- 60с.
3. Жаров С.В. Духовно-нравственные корни педагогической системы профессора С.А. Рачинского. – Журнал педагогических исследований. Том 9, №3, 2024.- с.41-46.
4. Малинин А.Ф., Буренин К.П. Арифметика: уч. пособие. - М.- 1910.- 250 с.
5. Малинин А.Ф., Буренин К.П, Собрание арифметических задач: уч. пособие. - М.- 1897.- 200 с.
6. Малинин А.Ф. Задачи для умственных вычислений: уч. пособие. - М.- 1916.- 120 с.
7. Рачинский С.А. Арифметические забавы// Народное образование. Книга III, март 1900. – Синодальная Типография. – С. 3–14.
8. Рачинский С.А. Сельская школа. - СПб, - 4-е изд., 1889.- 370 с.
9. Рачинский С.А. 1001 задача для умственного счета. - СПб, 1903.- 90 с.
10. ФГОС начального общего образования: Приказ Мин-ва обр. и науки Российской Федерации от 6 октября 2009 г., № 373.- 41 с.