Исследование степенных фракталов Ньютона

Extended study of Newton basins fractals

Бойков А.А.
Старший преподаватель кафедры «Инженерная графика», ФГБОУ ВО «МИРЭА - Российский технологический университет», г. Москва
e-mail: albophx@mail.ru

Boykov A.A.
Senior Lecturer, Department of Engineering Graphics, MIREA - Russian Technological University, Moscow
e-mail: albophx@mail.ru

Щукин М.П.
Студент, ФГБОУ ВО «МИРЭА - Российский технологический университет», г. Москва

Shchukin M.P.
Student, MIREA - Russian Technological University, Moscow

Аннотация
В статье представлены результаты студенческой научной работы, которые могут представлять интерес для исследователей в области алгебраических фракталов, а также разработчиков программ для графического и предметного дизайна. С позиции многомерной геометрии исследована разновидность степенного фрактала Жюлиа-Мандельброта, известная как бассейны Ньютона или фрактал Ньютона, разных степеней. Получены массивы фрактальных изображений для степеней 3–7. Обнаружено и исследовано образование звездчатых фигур.
Ключевые слова: алгебраические фракталы, множество Мандельброта, множество Жюлиа, фрактал Ньютона.

Abstract
The article presents the results of student research work, which may be of interest to researchers in the field of algebraic fractals, as well as developers of software for graphic and object design. From the perspective of multidimensional geometry, a variety of the power Julia-Mandelbrot fractal, known as Newton basins or the Newton fractal, of different orders is investigated.
Keywords: algebraic fractals, Mandelbrot set, Julia set, Newton basins fractal.

Введение

В работах [1, 2, 3] предлагается методика исследования фракталов типа множество Мандельброта (ФМ) вместе с фракталами типа множество Жюлиа (ФЖ) в рамках общего подхода, где ФМ и ФЖ получаются рассечением многомерного фрактального объекта сечениями плоскостей, параллельных плоскости Z_{re}-Z_{im} (ФЖ) или C_{re}-C_{im} (ФМ). Там же предлагается использовать указанную методику к фракталам, известным как «бассейны Ньютона», где итерационная формула получается из базового уравнения подстановкой в формулу Ньютона для поиска корней. Наиболее известен из этой группы фрактал Ньютона третьей степени. В настоящем исследовании указанная методика применяется к итерационным формулам, полученным способом Ньютона из уравнений различных степеней.

1. Фрактал Ньютона третьей степени

Степенное уравнение – $f(z) = z^3 + c$.
Итерационная формула: $F(z) = z – f(z)/f'(z) = z – (z^3 + c)/z^2$.

Для ФМ (рис. 1.1) значение Z_0 менялось в диапазоне от $-0,75 - 0,75i$ до $0,75 + 0,75i$ с шагом 0,25. Значение C принадлежало области $[-5 - 5i; 5 + 5i]$.

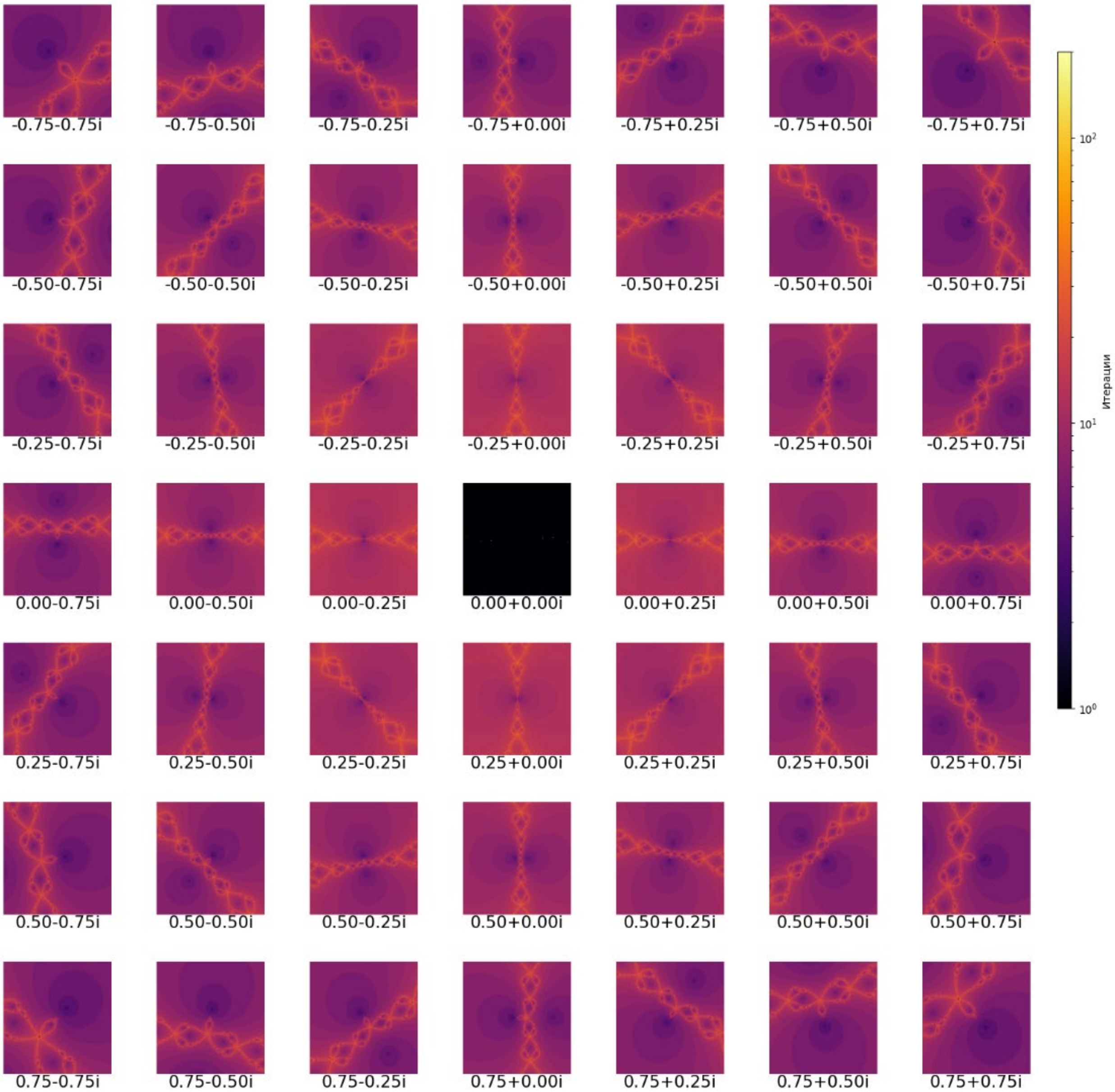


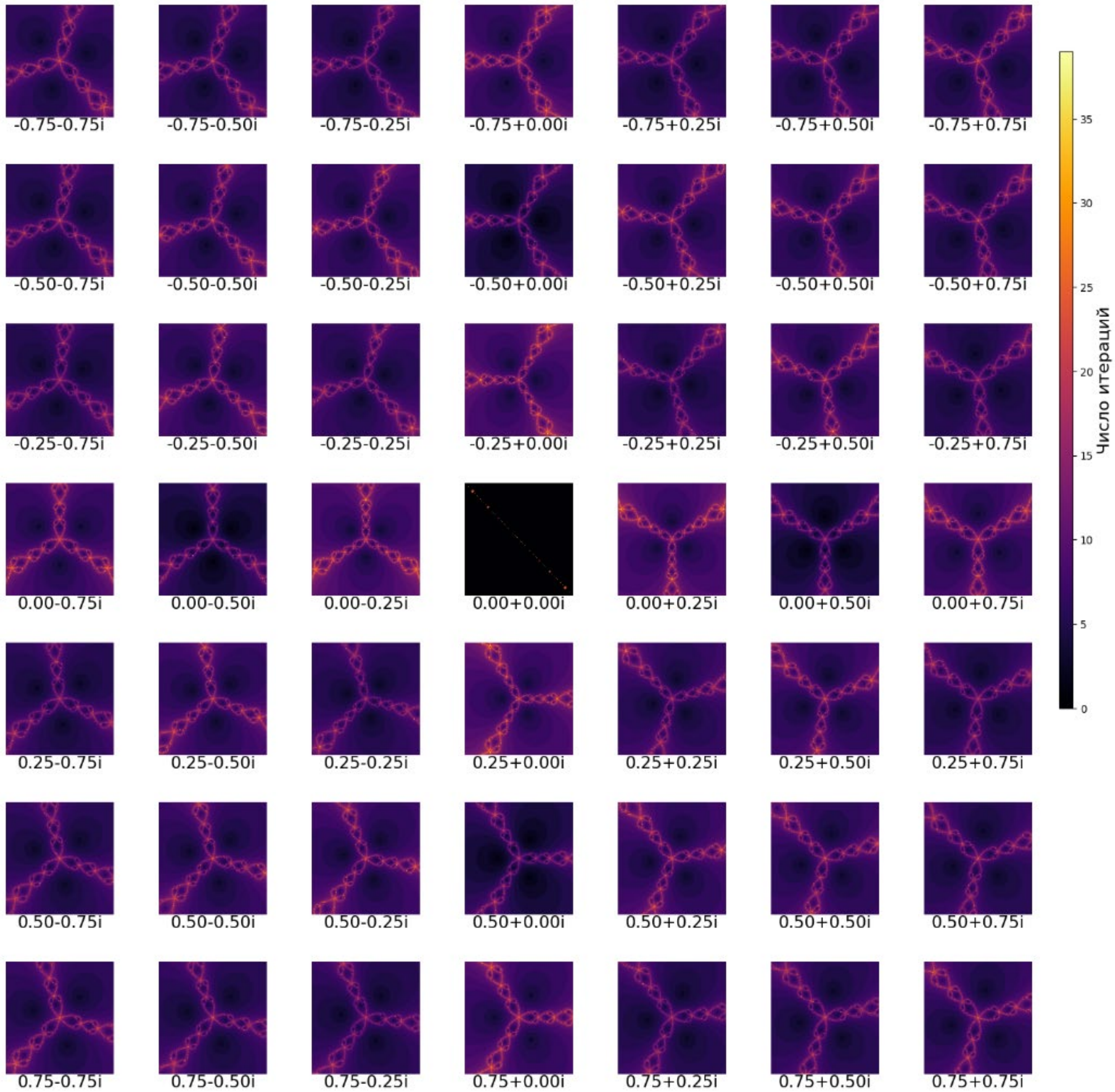
Рис. 1.1. Фракталы Мандельброта уравнения Ньютона степенной функции третьей степени для разных значений Z_0

На рис. 1.2, а–б показаны ФЖ, использованы два способа окраски – стандартный для фракталов Жюлиа-Мандельброта (по достижении границ) и стандартный для фракталов Ньютона (по значениям корней). Значение Z принадлежало области $[-2 - 2i; 2 + 2i]$.

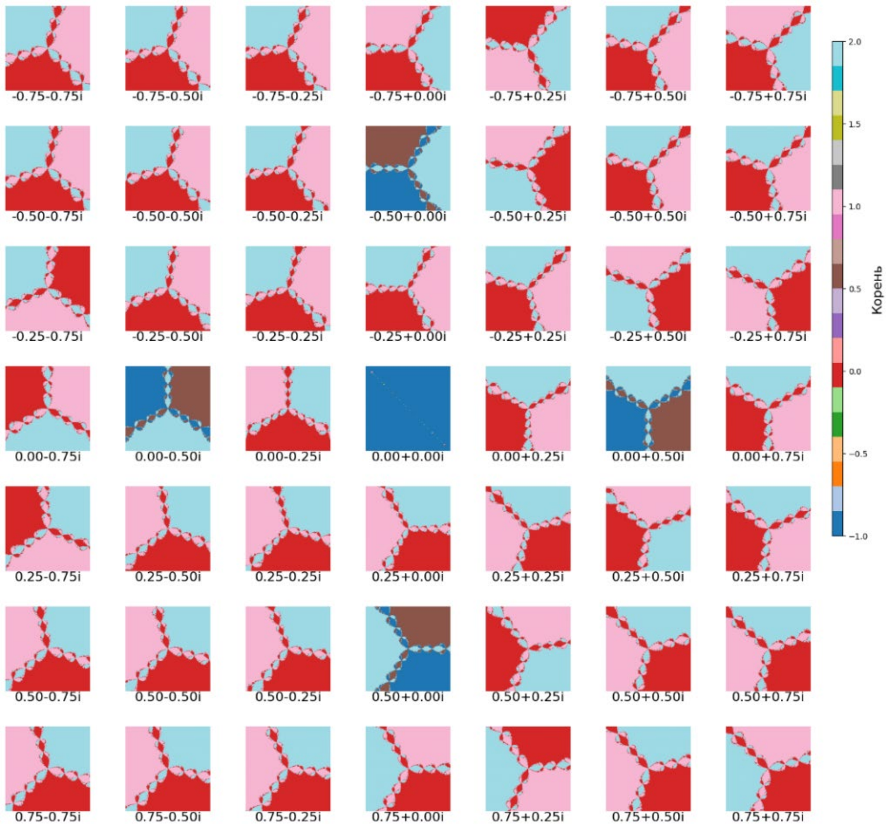
Построенные изображения, в целом, соответствуют результатам, полученным в предыдущих работах [2, 3], что подтверждает корректность созданной программной системы и позволяет перейти к построению изображений фракталов других степеней, изученных в меньшей степени. Также замечено, что приведенное в [2, 3] изображение фрактала Мандельброта для семейства бассейнов Ньютона с разными C_0 получено для отличного от $Z_0=0+0i$ значения (черный квадрат – деление на 0).

Мы видим, что все ФМ представляют собой повернутые на разный угол линейные цепи с центральной петлей, в центре таблицы – размеры звеньев и петли меньше, по мере удаления от центра – увеличиваются. Таблица миниатюр центрально симметрична, так что подробно исследовать достаточно ¼ таблицы.

Также мы видим, что все ФЖ представляют собой трехлучевые цепи, имеющие разный угол поворота и положение центрального узла. Таблица миниатюр центрально симметрична.



а)



б)

Рис. 1.2. Фракталы Жюлиа уравнения Ньютона степенной функции третьей степени для разных значений C_0

2. Фрактал Ньютона четвертой степени

Степенное уравнение – $f(z) = z^4 + c$.

Итерационная формула: $F(z) = z - f(z)/f'(z) = z - (z^4 + c)/z^3$.

Для ФМ (рис. 2.1) значение Z_0 менялось в диапазоне от $-0,75 - 0,75i$ до $0,75 + 0,75i$ с шагом 0,25. Значение C принадлежало области $[-5 - 5i; 5 + 5i]$.

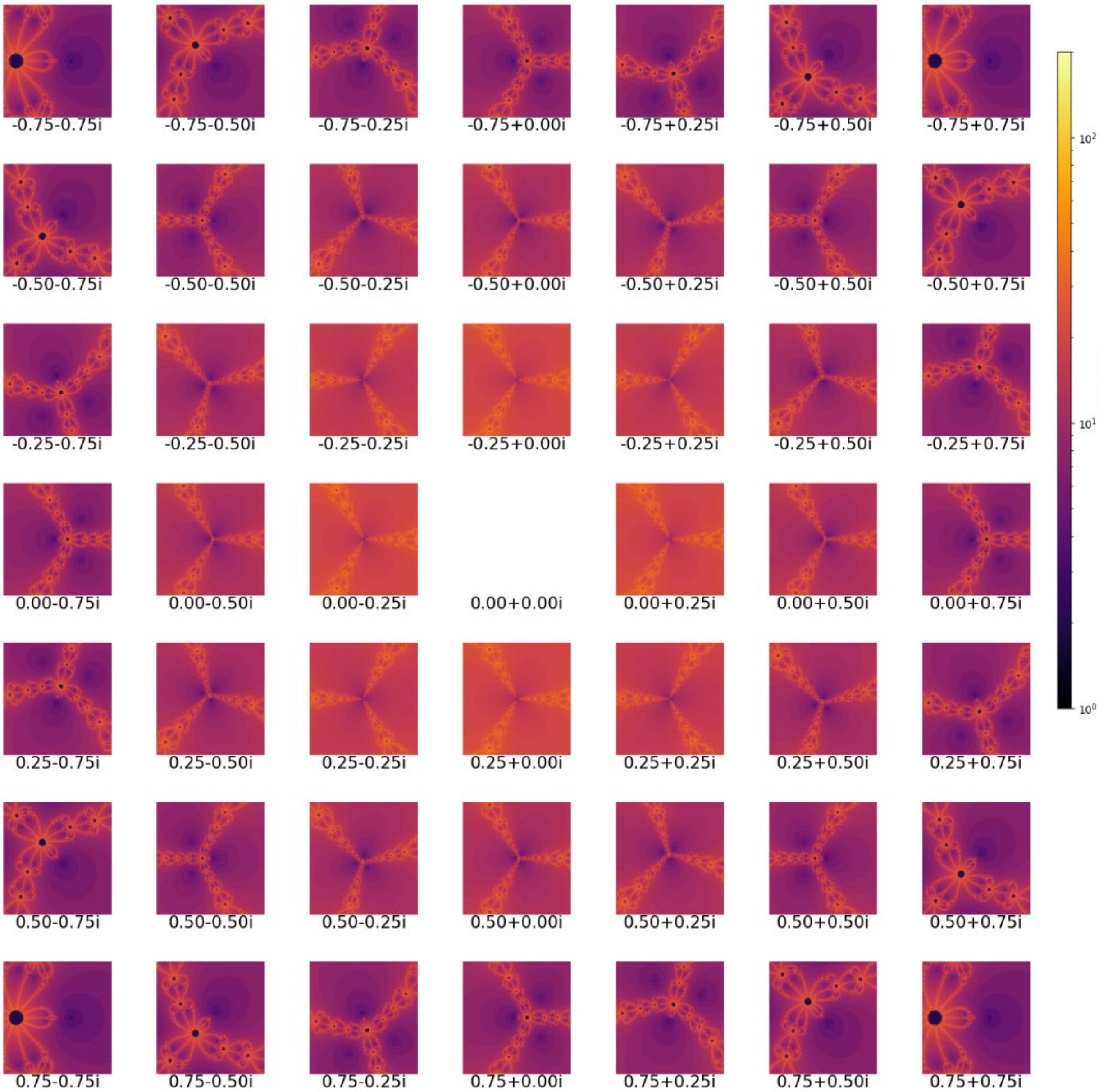
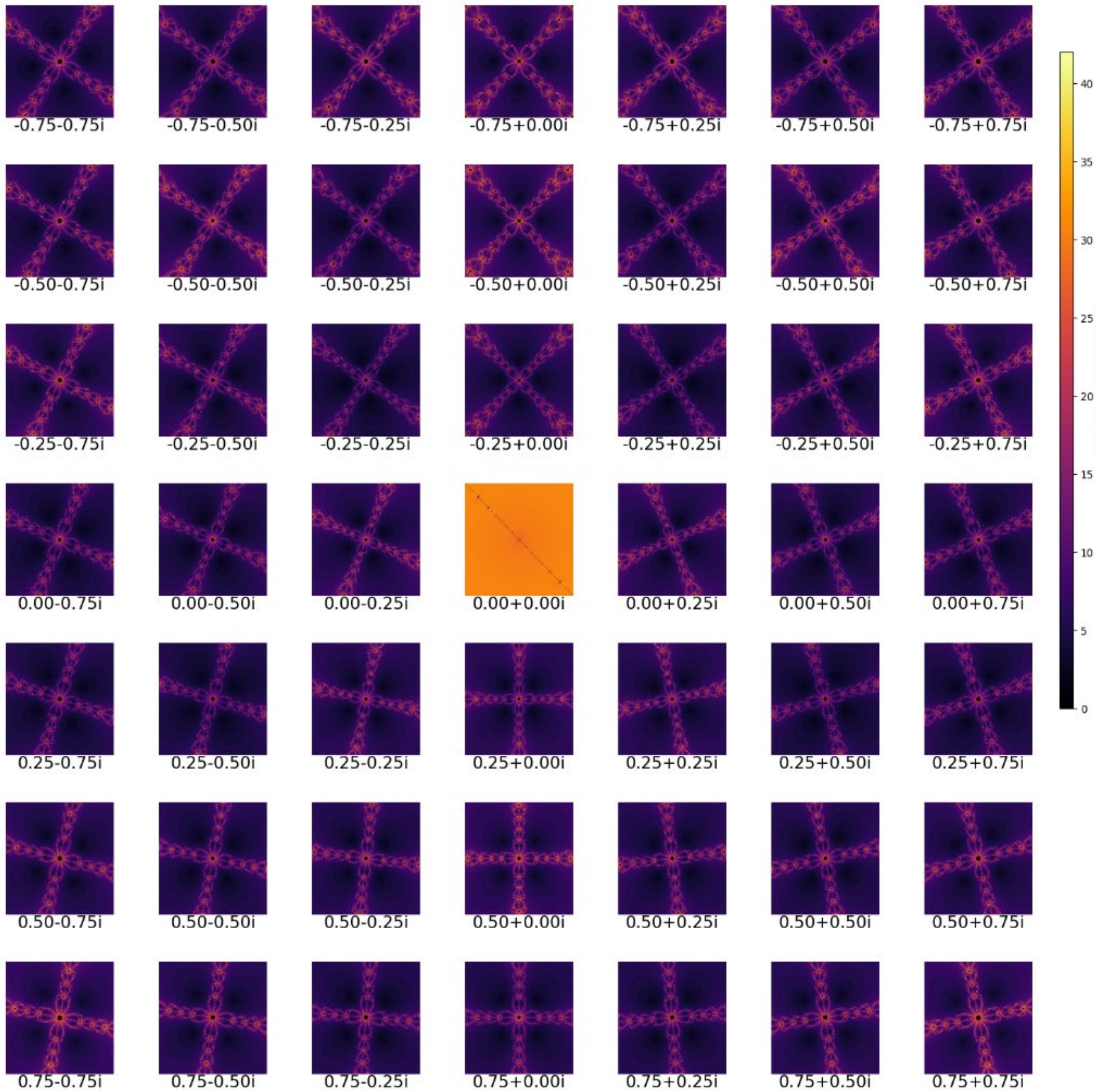


Рис. 2.1. Фракталы Мандельброта уравнения Ньютона степенной функции четвертой степени для разных значений Z_0

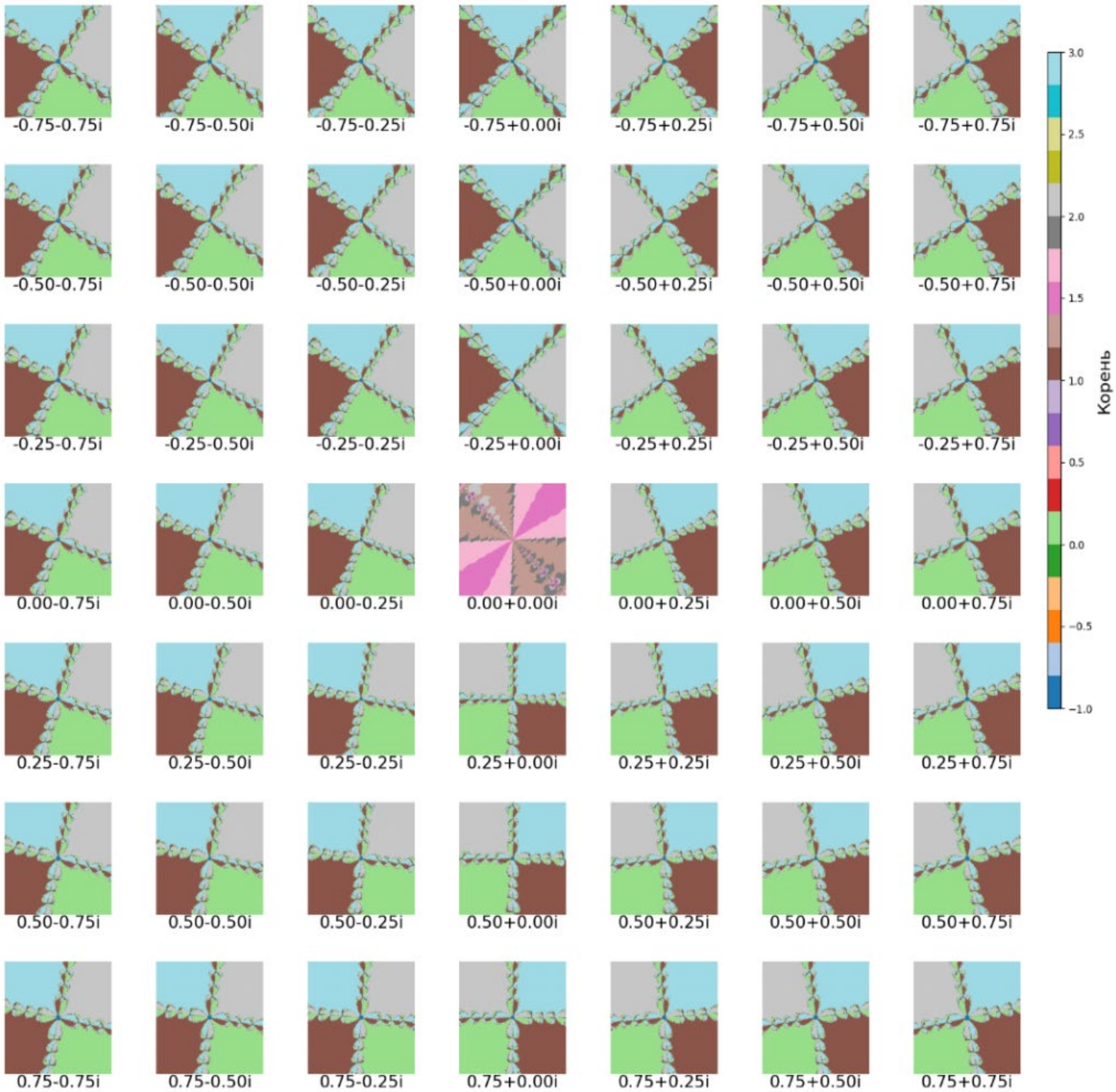
На рис. 2.2, а–б показаны ФЖ, использованы два способа окраски. Значение Z принадлежало области $[-2 - 2i; 2 + 2i]$.

Мы видим, что все ФМ представляют собой повернутые на разный угол трехлучевые цепи с центральной петлей, в центре таблицы – размеры звеньев и петли меньше, по мере удаления от центра – увеличиваются. Таблица миниатюр центрально симметрична.

Также мы видим, что все ФЖ представляют собой четырехлучевые цепи, имеющие разный угол поворота и положение центрального узла. Таблица миниатюр центрально симметрична.


-0.75-0.75i
-0.75-0.50i
-0.75-0.25i
-0.75+0.00i
-0.75+0.25i
-0.75+0.50i
-0.75+0.75i
-0.50-0.75i
-0.50-0.50i
-0.50-0.25i
-0.50+0.00i
-0.50+0.25i
-0.50+0.50i
-0.50+0.75i
-0.25-0.75i
-0.25-0.50i
-0.25-0.25i
-0.25+0.00i
-0.25+0.25i
-0.25+0.50i
-0.25+0.75i
0.00-0.75i
0.00-0.50i
0.00-0.25i
0.00+0.00i
0.00+0.25i
0.00+0.50i
0.00+0.75i
0.25-0.75i
0.25-0.50i
0.25-0.25i
0.25+0.00i
0.25+0.25i
0.25+0.50i
0.25+0.75i
0.50-0.75i
0.50-0.50i
0.50-0.25i
0.50+0.00i
0.50+0.25i
0.50+0.50i
0.50+0.75i
0.75-0.75i
0.75-0.50i
0.75-0.25i
0.75+0.00i
0.75+0.25i
0.75+0.50i
0.75+0.75i
Число итераций
40
35
30
25
20
15
10
5
0

a)



б)

Рис. 2.2. Фракталы Жюлиа уравнения Ньютона степенной функции четвертой степени для разных значений C_0

3. Фрактал Ньютона пятой степени

Степенное уравнение – $f(z) = z^5 + c$.

Итерационная формула: $F(z) = z - f(z)/f'(z) = z - (z^5 + c)/z^4$.

Для ФМ (рис. 3.1) значение Z_0 менялось в диапазоне от $-0,75 - 0,75i$ до $0,75 + 0,75i$ с шагом 0,25. Значение C принадлежало области $[-5 - 5i; 5 + 5i]$.

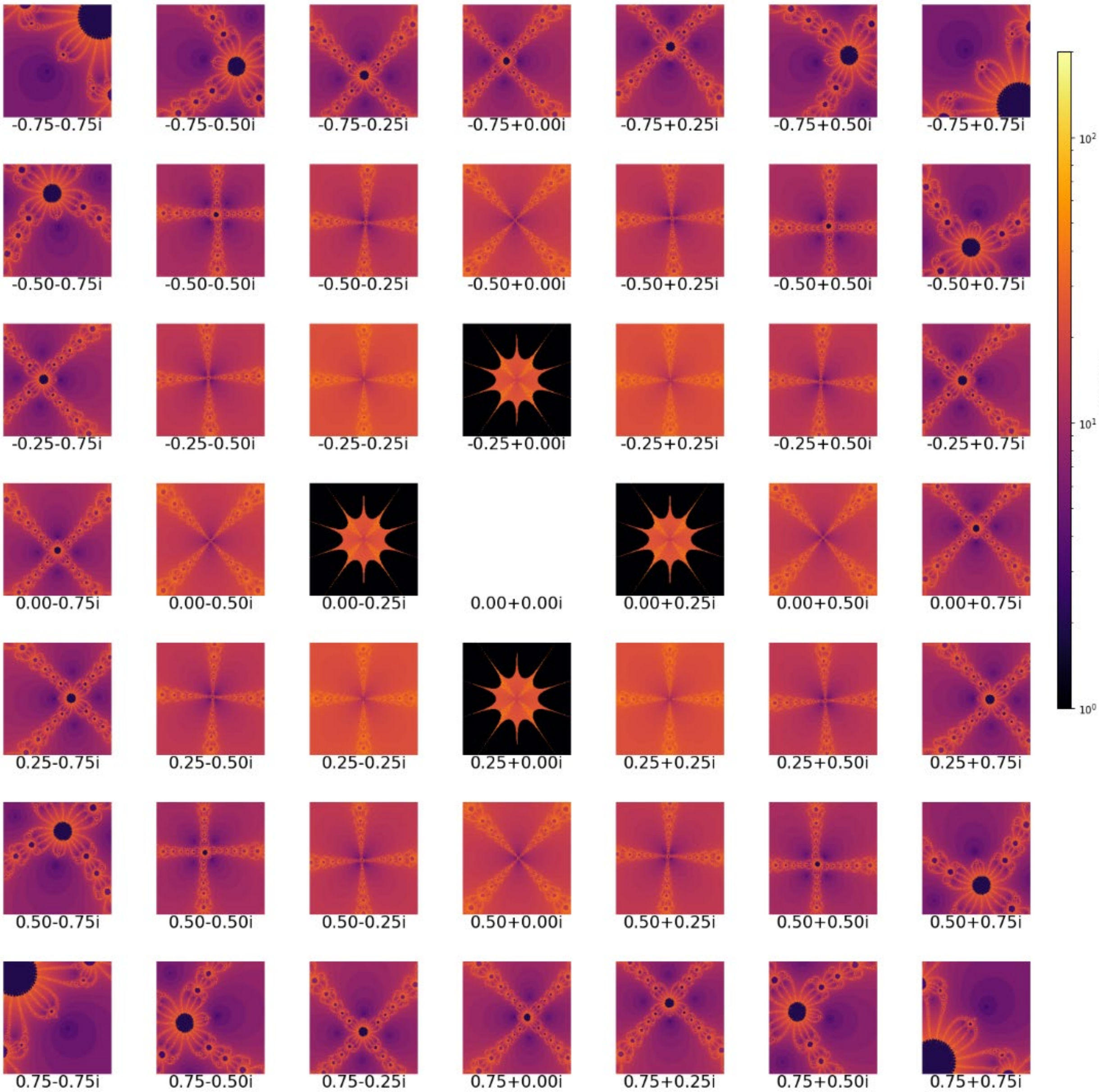
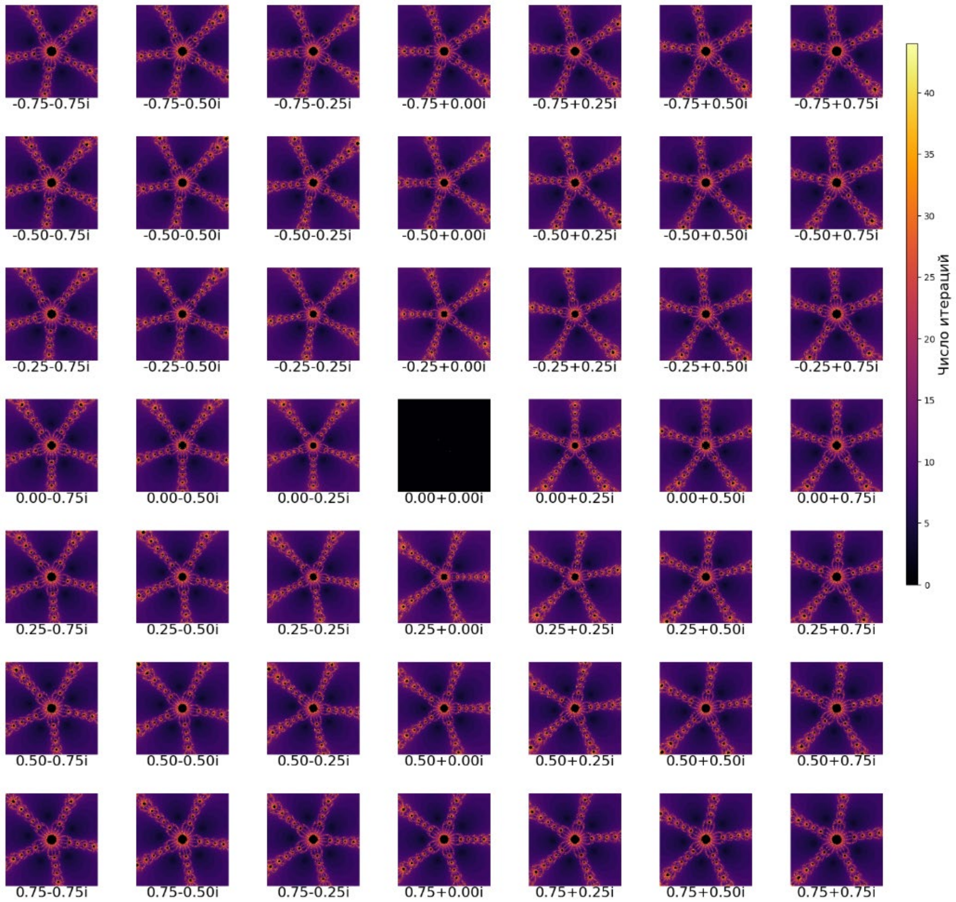


Рис. 3.1. Фракталы Мандельброта уравнения Ньютона степенной функции пятой степени для разных значений Z_0

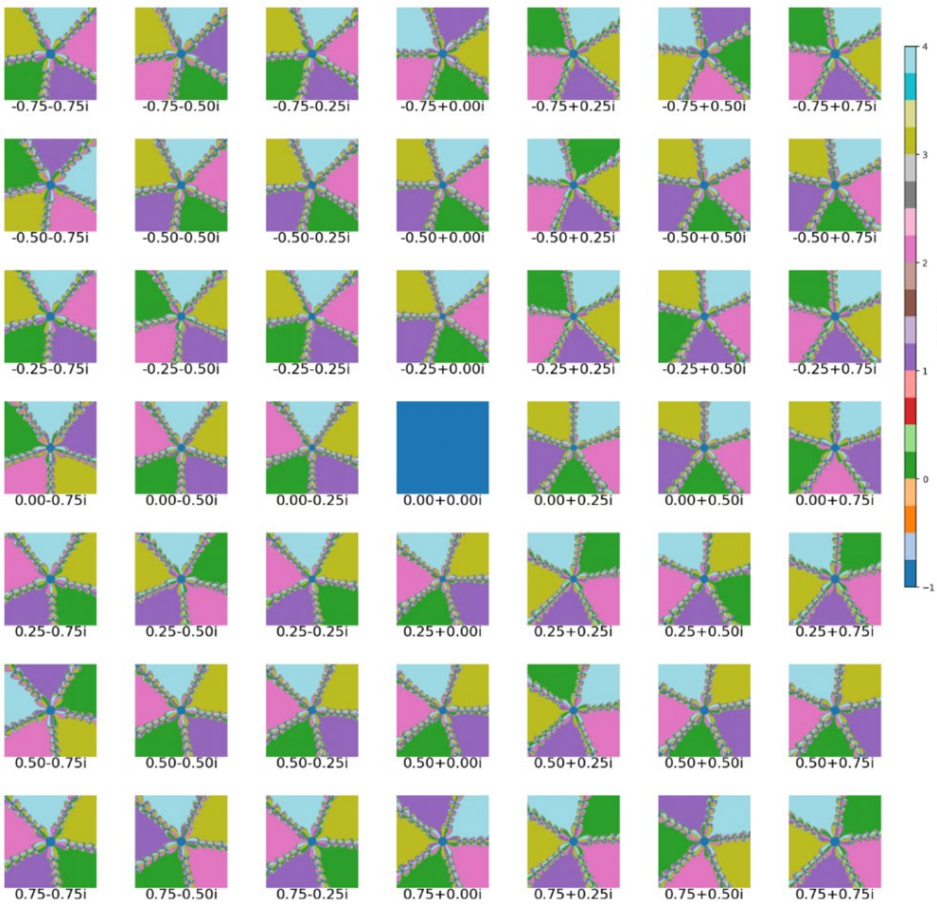
На рис. 3.2, а–б показаны ФЖ, использованы два способа окраски. Значение Z принадлежало области $[-2 - 2i;\ 2 + 2i]$.

Мы видим, что все ФМ представляют собой повернутые на разный угол четырехлучевые цепи с центральной петлей, в центре таблицы – размеры звеньев и петли меньше, по мере удаления от центра – увеличиваются. «Звезды» в таблице – изображение фрактала в целом, цепная фигура помещается внутри звезды. Таблица миниатюр центрально симметрична.

Также мы видим, что все ФЖ представляют собой пятилучевые цепи, имеющие разный угол поворота и положение центрального узла. Таблица миниатюр центрально симметрична.



а)



б)

Рис. 3.2. Фракталы Жюлиа уравнения Ньютона степенной функции пятой степени для разных значений C_0

4. Фрактал Ньютона шестой степени

Степенное уравнение – $f(z) = z^6 + c$.

Итерационная формула: $F(z) = z - f(z)/f'(z) = z - (z^6 + c)/z^5$.

Для ФМ (рис. 4.1) значение Z_0 менялось в диапазоне от $-0,75 - 0,75i$ до $0,75 + 0,75i$ с шагом 0,25. Значение C принадлежало области $[-5 - 5i; 5 + 5i]$.

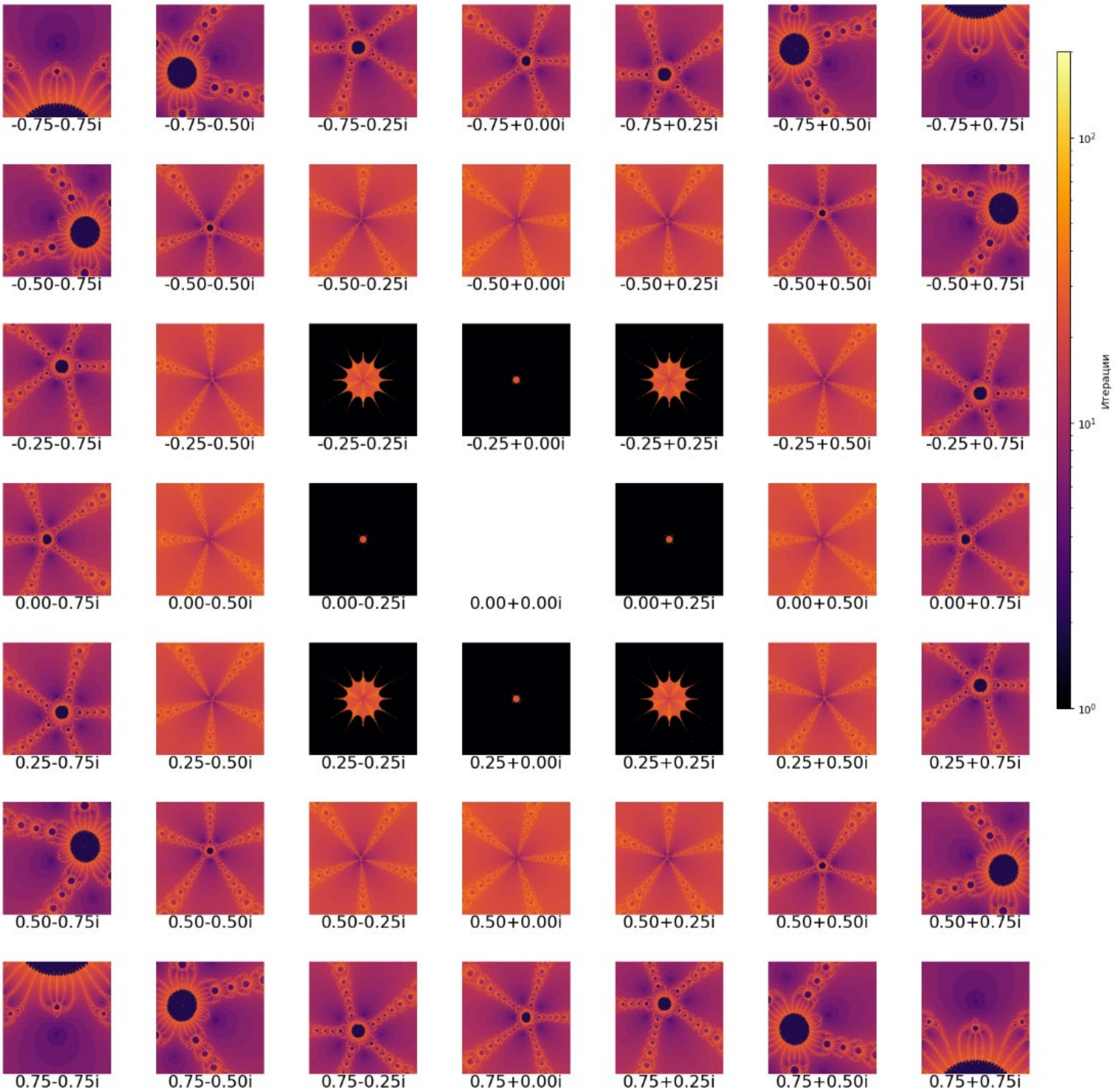
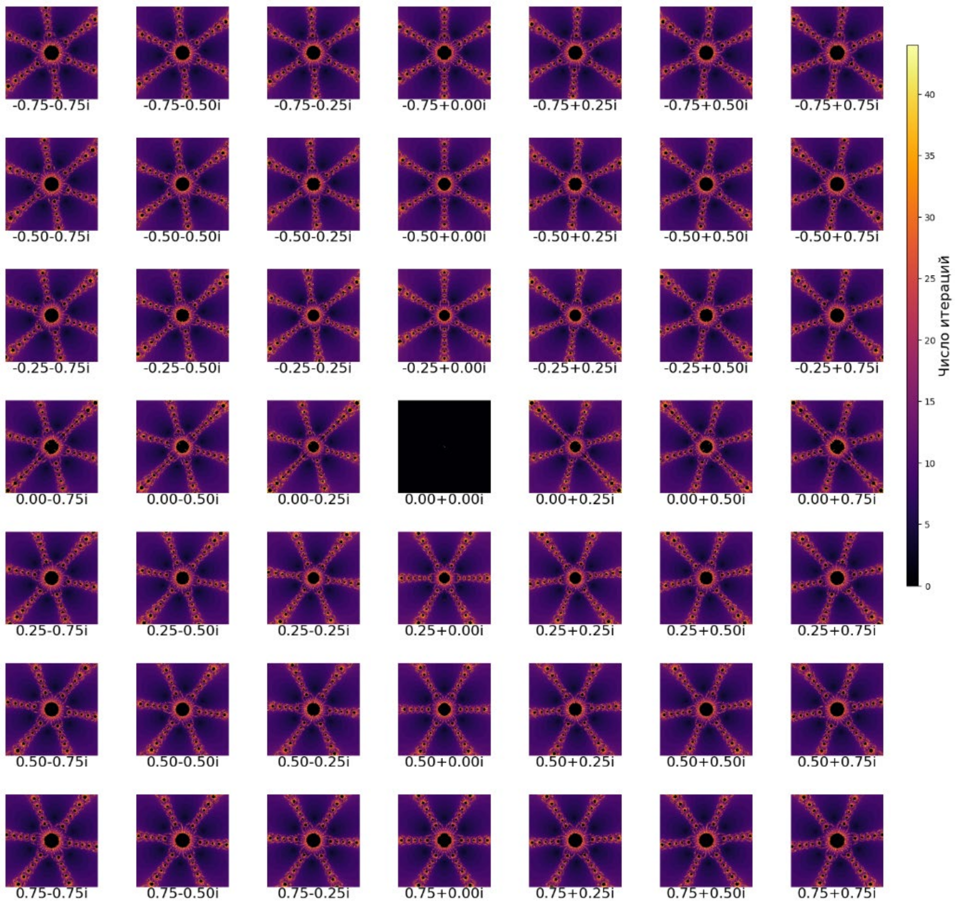


Рис. 4.1. Фракталы Мандельброта уравнения Ньютона степенной функции шестой степени для разных значений Z_0

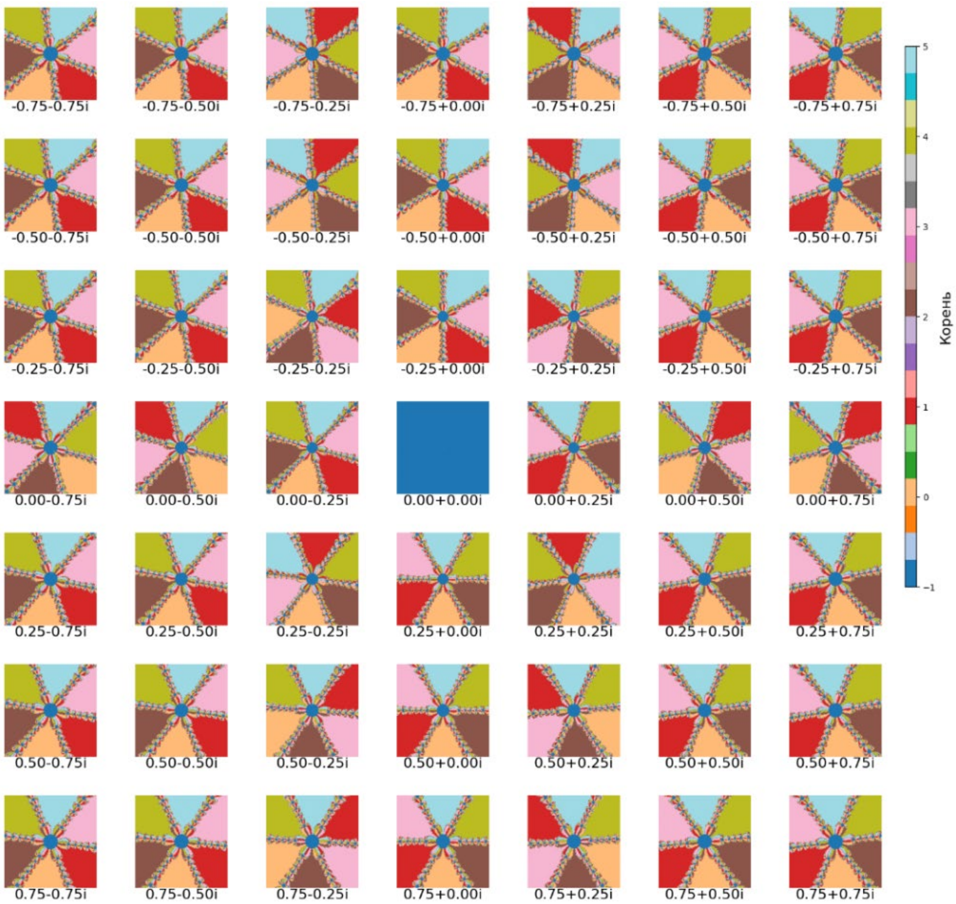
На рис. 4.2, а–б показаны ФЖ, использованы два способа окраски. Значение Z принадлежало области $[-2 - 2i; 2 + 2i]$.

Мы видим, что все ФМ представляют собой повернутые на разный угол пятилучевые цепи с центральной петлей, в центре таблицы – размеры звеньев и петли меньше, по мере удаления от центра – увеличиваются. «Звезды» и «точки» в таблице – изображение фрактала в целом, цепная фигура помещается внутри звезды, при малых значениях Z_0 «звезда» уменьшается до «точки». Таблица миниатюр центрально симметрична. Таблица миниатюр центрально симметрична.

Также мы видим, что все ФЖ представляют собой шестилучевые цепи, имеющие разный угол поворота и положение центрального узла. Таблица миниатюр центрально симметрична.



а)



б)

Рис. 4.2. Фракталы Жюлиа уравнения Ньютона степенной функции шестой степени для разных значений C_0

5. Фрактал Ньютона седьмой степени

Степенное уравнение – $f(z) = z^7 + c$.

Итерационная формула: $F(z) = z – f(z)/f'(z) = z – (z^7 + c)/ z^6$.

Для ФМ (рис. 5.1) значение Z_0 менялось в диапазоне от *–0,75 – 0,75i* до *0,75 + 0,75i* с шагом 0,25. Значение *C* принадлежало области *[–5 – 5i; 5 + 5i]*.

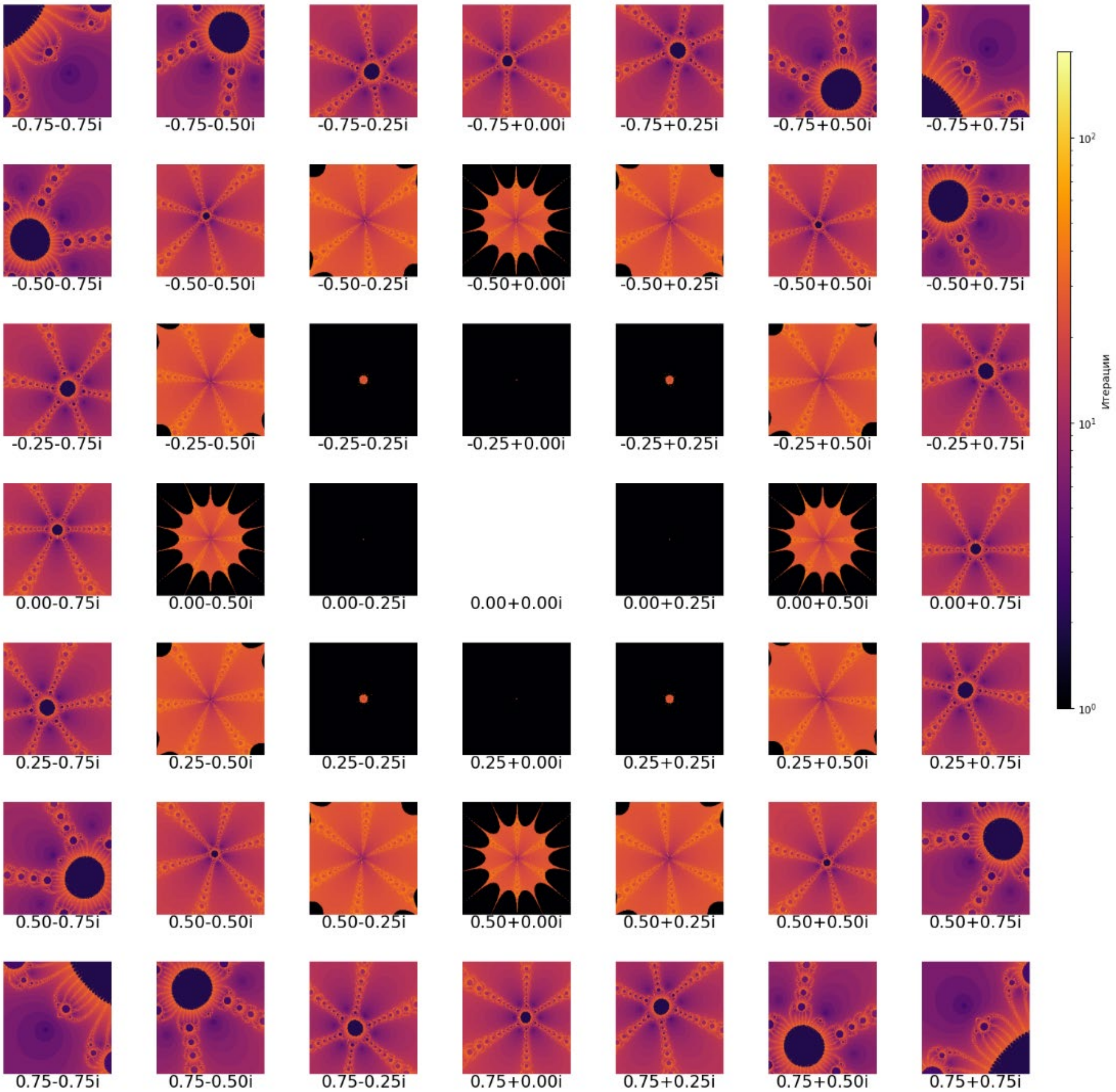
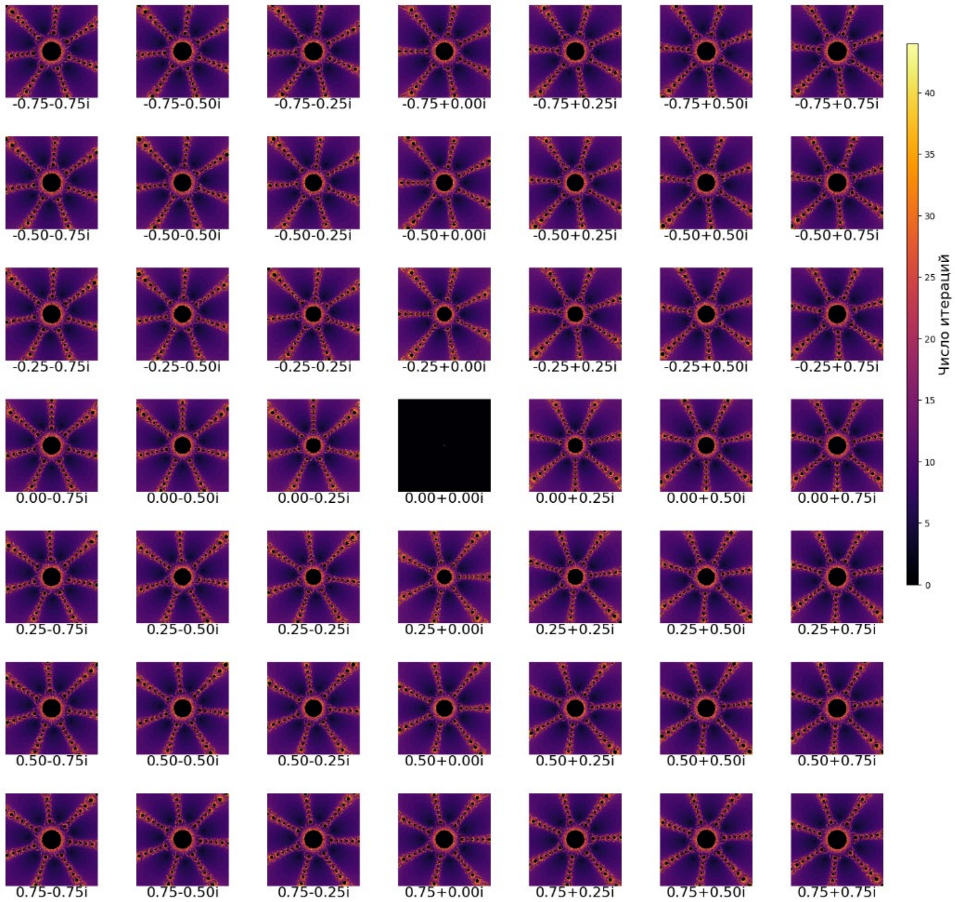


Рис. 5.1. Фракталы Мандельброта уравнения Ньютона степенной функции седьмой степени для разных значений Z_0

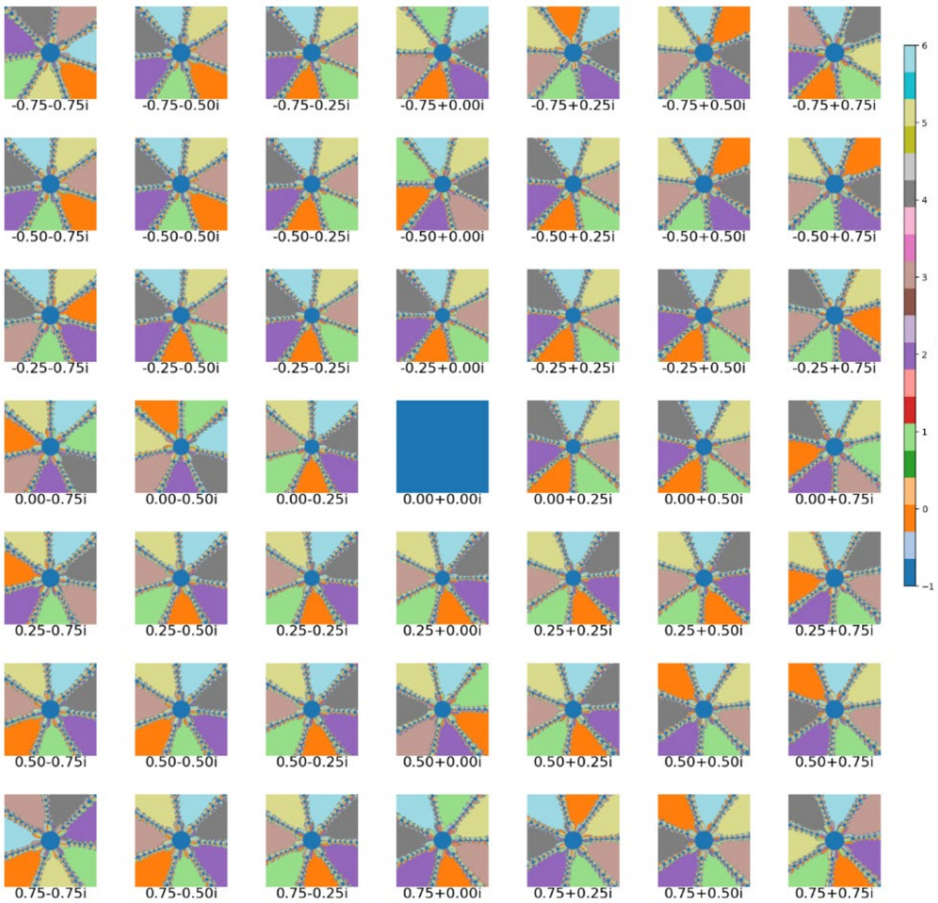
На рис. 5.2, а–б показаны ФЖ, использованы два способа окраски. Значение *Z* принадлежало области *[–2 – 2i; 2 + 2i]*.

Мы видим, что все ФМ представляют собой повернутые на разный угол шестилучевые цепи с центральной петлей, в центре таблицы – размеры звеньев и петли меньше, по мере удаления от центра – увеличиваются. «Звезды» и «точки» в таблице – изображение фрактала в целом. Таблица миниатюр центрально симметрична.

Также мы видим, что все ФЖ представляют собой семилучевые цепи, имеющие разный угол поворота и положение центрального узла. Таблица миниатюр центрально симметрична.



а)



б)

Рис. 5.2. Фракталы Жюлиа уравнения Ньютона степенной функции седьмой степени для разных значений C_0

«Звезды» в таблице миниатюр фракталов Мандельброта и Жюлиа

При построении миниатюр ФМ пятой и больше степени появляются изображения, напоминающие внешним видом звезды. Их общее свойство – появляться при уменьшении фрактальной фигуры, то есть при «отдалении» фрактала. Тот же эффект проявляется, если для одного и того же значения Z_0 увеличить размеры области (рис. 6.1).

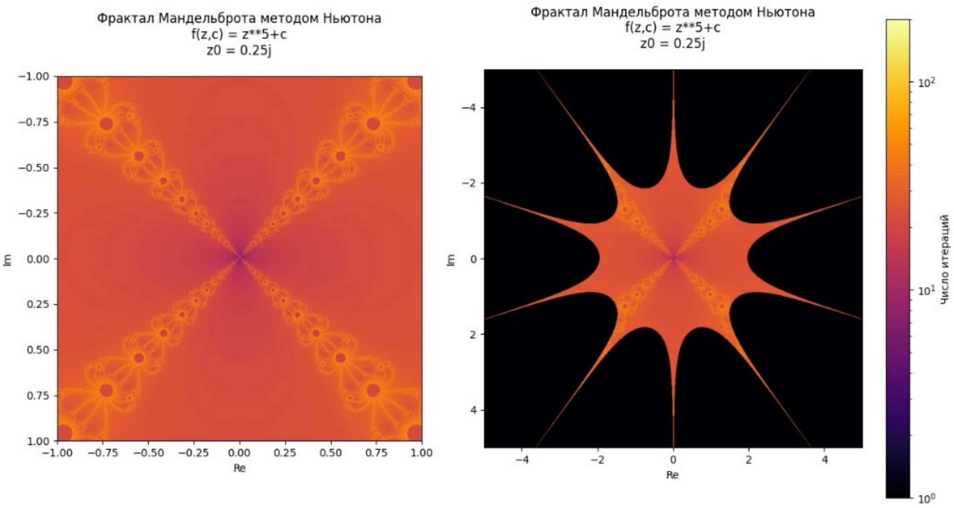


Рис. 6.1. Образование звездчатой фигуры во фрактале Мандельброта

Эксперименты показали, что «звезды» появляются не только в изображениях фракталов Мандельброта для метода Ньютона, но и в изображениях фракталов Жюлиа для метода Ньютона (рис. 6.2).

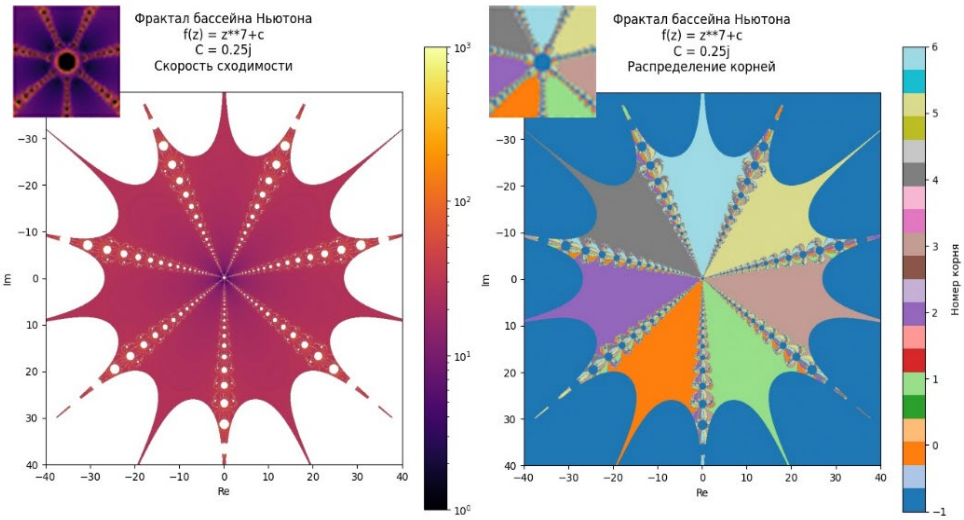


Рис. 6.2. Образование звездчатой фигуры во фрактале Жюлиа

Размер звезды уменьшается с увеличением показателя степени уравнения.

Заключение и выводы

Данная студенческая работа проводилась в соответствии с практико-ориентированной методикой [5, 6, 7].

В работе были получены массивы фрактальных изображений для степеней 3–7, что позволяет легко произвести их оценку «в целом», в частности, делая выбор образа для задач дизайна. Было показано, что фигуры фракталов одной степени очень похожи с точностью до масштаба и поворота. Было обнаружено и исследовано образование звездчатых фигур.

В дальнейшем имеет смысл рассмотреть обобщения фрактала Ньютона, например, проверить существование и свойства фракталов уравнений, имеющих дробные степени. Другим обобщением является так называемый фрактал Нова.

Литература

1. Бойков А.А., Орлова Е.В., Чернова А.В., Шкилевич А.А. О создании фрактальных образов для дизайна и полиграфии и некоторых геометрических обобщениях, связанных с ними // Проблемы качества графической подготовки студентов в техническом вузе: традиции и инновации. Материалы VIII Международной научно-практической интернет-конференции, февраль – март 2019 г. – Пермь: ПНИПУ, 2019. – С. 325–339.
2. Бойков А.А., Ефремов А.В., Рустамян В.В. О студенческой научно-исследовательской работе на геометро-графических кафедрах // Геометрия и графика. 2023. №. 4. С. 61-75. DOI: 10.12737/2308-4898-2024-11-4-61-75.
3. Вышнепольский В.И., Бойков А.А., Егиазарян К.Т., Кадыкова Н.С. Методическая система проведения занятий на кафедре «Инженерная графика» РТУ МИРЭА // Геометрия и графика. 2023. №. 1. С. 23-34. DOI: 10.12737/2308-4898-2023-11-1-23-34.
4. Вышнепольский В.И., Бойков А.А., Егиазарян К.Т., Ефремов А.В. Научно-исследовательская работа на кафедре «Инженерная графика» РТУ МИРЭА // Геометрия и графика. 2023. №. 1. С. 70-85. DOI: 10.12737/2308-4898-2023-11-1-70-85.
5. Орлова Е.В., Чернова А.В. Исследование алгебраических фракталов с позиции многомерной геометрии // Журнал естественнонаучных исследований. 2024. Т.9, №4. С. 64–71.
6. Шкилевич А.А. К исследованию фрактальных образов множеств Жулиа-Мандельброта // Журнал естественнонаучных исследований. 2024. Т. 9, №2. С. 31–37.