Разработка графической системы моделирования геометрического места точек, пропорционально удаленных от пары геометрических объектов

Development of a graphical system for modeling the locus of points equidistant from a pair of geometric objects

Пех Д.С.
Ассистент кафедры «Инженерная графика», ФГБОУ ВО «МИРЭА - Российский технологический университет», г. Москва
e-mail: danilapehta5ok@mail.ru

Peh D.S.
Assistant at the Department of Engineering Graphics, MIREA – Russian Technological University, Moscow
e-mail: danilapehta5ok@mail.ru

Аннотация
В ряде прикладных задач - от навигации мобильных роботов в динамических средах до моделирования зон покрытия беспроводных сетей - возникает потребность не просто делить пространство по ближайшему соседу, а учитывать относительное влияние источников разного «типа» и «силы». Классическая диаграмма Вороного не позволяет задать неоднородные веса генераторов (геометрических объектов) или учитывать их сложные конфигурации. Для решения данной проблемы разработана унифицированная модель обобщенно-взвешенной диаграммы Вороного, позволяющей для каждого типа генератора задавать собственный вес (коэффициент влияния), и представлены интерактивные средства управления этими параметрами. В перспективе планируется расширить функционал за счёт внедрения новых типов генераторов - геометрических объектов и применения для задач ориентации агентов в сцене и сложных симуляций.
Ключевые слова: обобщенная диаграмма Вороного, геометрические места точек, эквидистанта, взвешенный биссектор.

Abstract
In a range of applied tasks - from mobile robot navigation in dynamic environments to modeling wireless network coverage zones - there arises a need not merely to partition space by nearest neighbors, but to account for the relative influence of sources with different 'types' and 'strengths'. Classical Voronoi diagrams cannot accommodate non-uniform weights for generators (geometric objects) or handle their complex configurations. To address this problem, a unified model of a generalized weighted Voronoi diagram has been developed. This model allows assigning a custom weight (influence coefficient) to each generator type and provides interactive tools for parameter control. Future work plans to extend functionality by introducing new generator types – geometric objects and applying the model to agent scene orientation tasks and complex simulations.
Keywords: generalized Voronoi diagram, locus, equidistant, weighted bisector.

Введение

Геометрическое место точек (ГМТ) может быть задано как множество точек, равноотстоящих или пропорционально отстоящих от двух исходных объектов. Множество таких точек лежит на определённой кривой или поверхности, причём чем сложнее конфигурация исходных объектов, тем более интересной оказывается форма их ГМТ.

В ряде прикладных задач - от навигации мобильных роботов в динамических средах до моделирования зон покрытия беспроводных сетей - возникает потребность не просто делить пространство по ближайшему соседу, а учитывать относительное влияние источников разного «типа» и «силы». Классическая диаграмма Вороного не позволяет задать неоднородные веса генераторов (источников) или учитывать сложные конфигурации объектов. Разработка универсальной системы моделирования ГМТ, пропорционально удаленных от исходных геометрических объектов, позволит решить данную проблему, обеспечивая гибкое и интерактивное управление параметрами объектов и их влияние на разбиение пространства.

В рамках данной работы объектом исследования являются геометрические места точек, пропорционально удалённых от пары геометрических объектов, а предметом исследования - алгоритмы построения и численные методы моделирования обобщённых диаграмм Вороного.

Цель исследования - графическое моделирование пропорционально удаленных объектных границ для решения задачи ориентации агента в пространстве сцены. Для достижения этой цели поставлены следующие **задачи**:

1. Исследовать методы построения геометрических мест точек (ГМТ), равно- или пропорционально удалённых от пары геометрических объектов.
2. Разработать алгоритм моделирования ГМТ, пропорционально удалённых от пары геометрических объектов.
3. Исследовать ГМТ, пропорционально удаленных от некоторых пар геометрических объектов (точка и точка, прямая и прямая, точка и прямая).
4. Применить разработанную систему для моделирования обобщённо-взвешенных диаграмм Вороного.

Диаграммы Вороного. Общие сведения

Диаграмма Вороного – это разбиение пространства на области, каждая точка которых лежит ближе к одному из заданных генераторов. Генераторами в классическом случае являются точки (рис. 1). Отрезки, формируемые между точками, являются геометрическим местом точек, равноудаленных от двух ближайших точек-генераторов. Множество отрезков и разбивают пространство на соответствующие области.

Диаграммы Вороного находят широкое применение в картографии, программировании, геометрии, геоинформатике и даже биологии [1]. В частности, диаграмма Вороного может применяться в робототехнике для навигации и ориентации агента в пространстве [2].

Классическая диаграмма Вороного имеет вид:

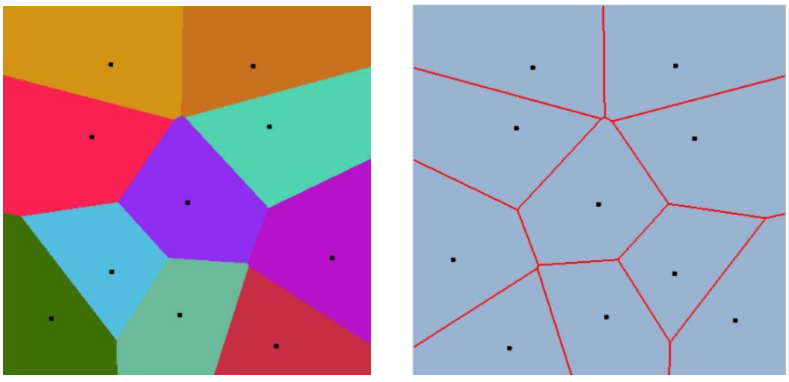

Рис. 1. Классическая диаграмма Вороного

Если мы введем в систему коэффициент пропорциональности, то множество кривых, формируемых на диаграмме, уже будут являться геометрическим местом точек, пропорционально удаленных от ближайших точек-генераторов (рис. 2). Коэффициент пропорциональности является отношением весов двух генераторов. Чем выше вес одного генератора, тем большую область «влияния» он занимает и наоборот.

Классическая диаграмма Вороного, использующая коэффициент пропорциональности, называется взвешенной диаграммой Вороного. Каждая кривая, формируемая на изображении, является дугой окружности Апполония (рис. 2) [3]. Если же веса соседних генераторов одинаковы, то дуга вырождается в прямую.

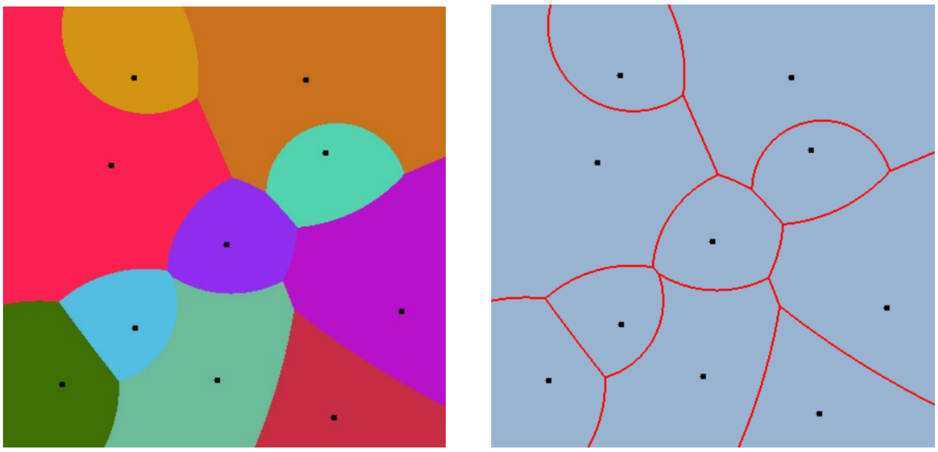

Рис. 2. Классическая диаграмма Вороного.

Также если в качестве исходного множества берутся не точки, а геометрические объекты, то диаграмма становится обобщенной (рис. 3).

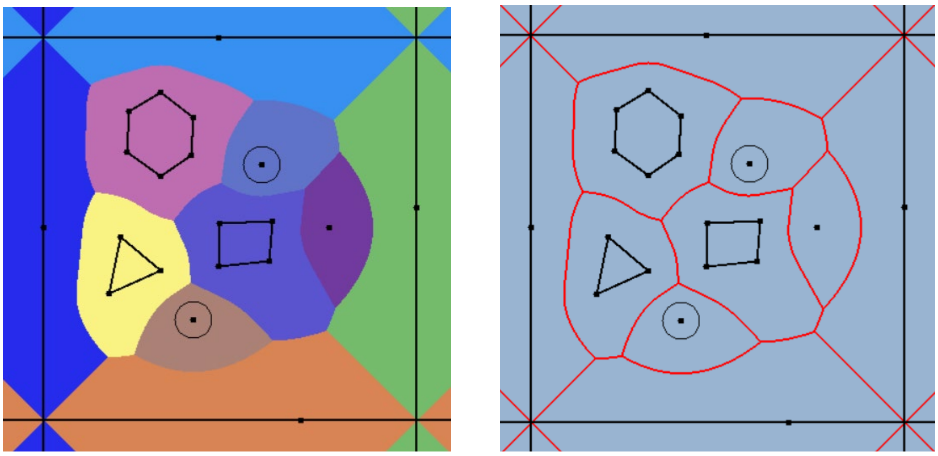

Рис. 3. Обобщенная диаграмма Вороного

В результате формируется сеть кривых, каждая точка которой лежит на равноудаленном расстоянии от двух ближайших геометрических объектов. Обобщенная диаграмма Вороного моделирует не все возможные маршруты, а только равноудаленные. Поэтому целью данной работы является реализовать систему графического моделирования пропорционально удаленных объектных границ. То есть смоделировать «обобщенно-взвешенную» диаграмму Вороного.

Для реализации системы необходимо исследовать существующие методы моделирования геометрических мест точек, пропорционально удаленных от пары геометрических объектов и выбрать из них тот, который войдет в основу разрабатываемой системы. Подробнее о методах в следующей главе.

Метод взвешенного биссектора

Метод взвешенного биссектора представляет собой обобщение классической процедуры построения границ диаграммы Вороного, в котором вместо равных расстояний используется «взвешенное» расстояние – т.е. каждый генератор получает собственный вес, влияющий на форму и положение границ [4].

В соответствии с данным методом множество точек, пропорционально удаленных от пары исходных геометрических объектов, есть геометрическое место точек, для которых взвешенные расстояния до двух заданных точек равны:

$$d\text{взв}(P, A) = d\text{взв}(P, B) \tag{1}$$

Взвешенное расстояние определяется как отношение расстояния между точками к весу:

$$\frac{d(P, A)}{w_A} = \frac{d(P, B)}{w_B} \tag{2}$$

Расстояние между точками, принадлежащим разным объектам, определяются по-разному. Если мы определяем расстояние до точки (рис. 4), то это будет евклидово расстояние:

$$d(P_1, A) = \sqrt{(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2} \tag{3}$$

Если мы определяем расстояние до точки на окружности (рис. 4), то это будет евклидово расстояние до центра окружности минус радиус окружности:

$$d(P_3, A) = \sqrt{(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2} - R \tag{4}$$

Если мы определяем расстояние до точки на прямой (рис. 4), то это будет длина перпендикуляра, опущенного из точки на прямую:

$$d(P_2, A) = |(x - x_A)\sin\alpha + (y - y_A)\cos\alpha| \tag{5}$$

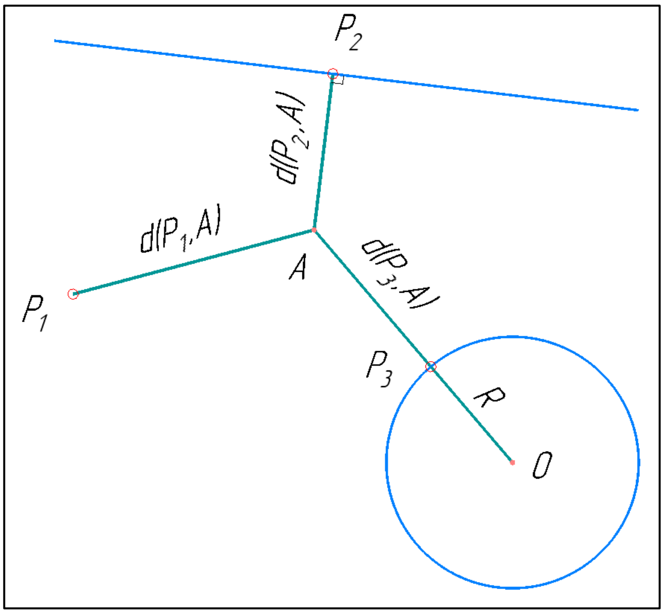

Рис. 4. Определение расстояния до точки, прямой и окружности

Если объект представлен более сложной формой, то алгоритм нахождения расстояния до объекта становится сложнее. В таком случае геометрический объект аппроксимируется ломаной линией, заданной массивом точек (P_0, P_1, … , P_n), образующих отрезки (P_iP_{i+1}). Расстояние от произвольной точки $A(x,\ y)$ до отрезков будет определяться следующим образом:

$$d(P,A)=\begin{cases}|(x-x_A)\sin\alpha+(y-y_A)\cos\alpha|, & 0<t<1\\ \sqrt{\left(x-x_{A_i}\right)^2+\left(y-y_{A_i}\right)^2}, & t<0\\ \sqrt{\left(x-x_{A_{i+1}}\right)^2+\left(y-y_{A_{i+1}}\right)^2}, & t>1\end{cases} \tag{6}$$

где:

$$\boldsymbol{t}=\frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x_1})(\boldsymbol{x_2}-\boldsymbol{x_1})+(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y_1})(\boldsymbol{y_2}-\boldsymbol{y_1})}{(\boldsymbol{x_2}-\boldsymbol{x_1})^2+(\boldsymbol{y_2}-\boldsymbol{y_1})^2} \tag{7}$$

Параметр t – величина, определяющая положение ортогональной проекции точки A на отрезок (P_iP_{i+1}). Если $0 < t < 1$, то ближайшая точка лежит на отрезке (точка A_1, рис. 5). Если $t < 0$ или $t > 1$, то ближайшая точка – вершина многоугольника (точка A_2, рис. 5).

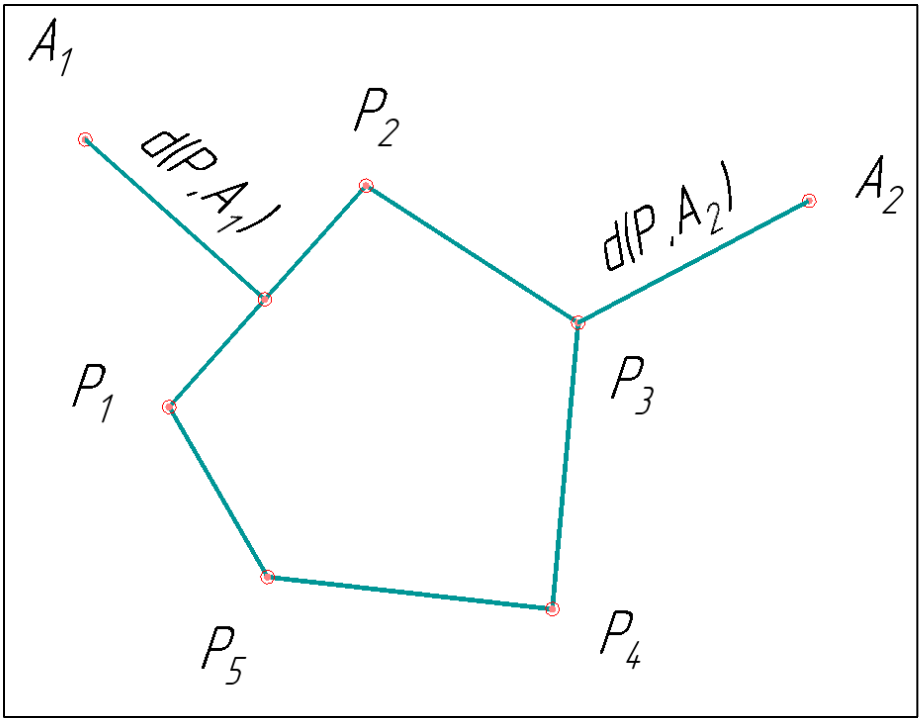

Рис. 5. Определение расстояния до аппроксимированного объекта

Затем каждое вычисленное расстояние корректируется значением веса и сравнивается друг с другом. Если расстояние от пикселя (точка А) до объекта наименьшее, то пиксель окрашивается в цвет объекта-генератора. По представленному алгоритму высчитывается взвешенное расстояние для каждого пикселя и формируется изображение (рис. 6).

На рис. ниже изображена диаграмма Вороного, состоящая из трех пересекающихся кривых, каждая из которых является геометрическим местом точек, пропорционально отстоящих от каждый пары геометрических объектов. Для пар точка-прямая и прямая-окружность – это пара дуг парабол. Для пары точка-окружность – это дуга окружности Аполлония.

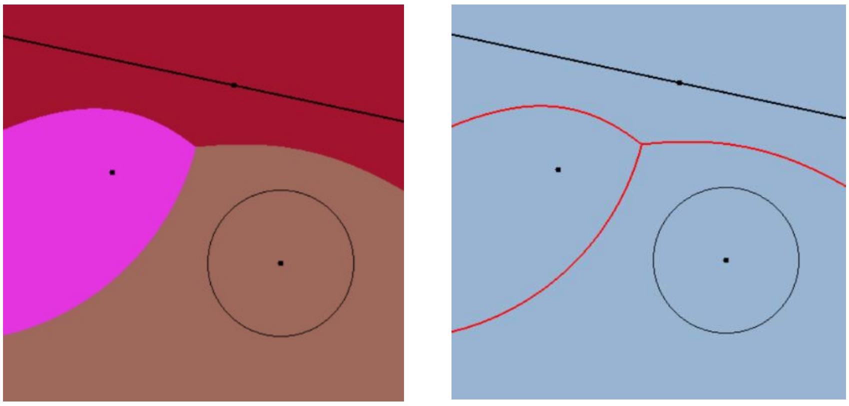

Рис. 6. Диаграмма Вороного для точки, прямой и окружности

Преимущества этого подхода заключаются, прежде всего, в его гибкости и универсальности. Во-первых, он сохраняет все свойства исходного алгоритма Вороного, одновременно давая возможность моделировать ситуации с неоднородным влиянием разных генераторов. Во-вторых, метод легко адаптируется к любым геометрическим объектам, если для них задана функция «взвешенного» расстояния. Это позволяет обрабатывать не только точки, но и окружности, прямые, ломаные или сплайны. В-третьих, ввод весов делает модель более реалистичной для приложений в геоинформационных системах, робототехнике, сотовой связи и других областях, где необходимо учитывать разную степень влияния источников.

Однако у данного метода есть ограничение - при больших наборах генераторов или сложных формах объектов (ломаные, сплайны с большим числом сегментов) время построения диаграммы может стать неприемлемым без серьёзной оптимизации. Тем не менее, если на сцене присутствует только два генератора, то данный метод будет мощным инструментом для исследования геометрических мест точек, пропорционально удаленных от пары геометрических объектов.

Данный метод обладает большими преимуществами перед остальными методами, поэтому он лег в основу разрабатываемой системы.

Разработка системы моделирования геометрических мест точек, пропорционально удаленных от пары геометрических объектов

Разработка системы графического моделирования геометрических мест точек, пропорционально удалённых от пары геометрических объектов, требует выбора подходящих языков программирования и технических решений, обеспечивающих интерактивную визуализацию, гибкую конфигурацию генераторов и точные численные вычисления.

В качестве среды разработки выбран язык программирования C# и платформа .NET Framework 4.7.2 с использованием Windows Forms. Данный выбор обусловлен наличием встроенных инструментов, обеспечивающих быструю и удобную реализацию пользовательского интерфейса, поддержкой графики через пространство имен System.Drawing, позволяющее рисовать примитивы, кривые и сложные контуры, лёгкостью интеграции объектно-ориентированной структуры классов генераторов и алгоритмов моделирования, а также наличием возможности масштабирования проекта и добавления новых объектов без полной переработки архитектуры.

Задача ставится следующий образом: необходимо реализовать интерактивную систему, которая позволяет добавлять генераторы – геометрические объекты различной природы, позволяет изменять для генераторов веса и параметры геометрической фигуры, рассчитывает геометрическое место точек, пропорционально удаленных от каждый пары генераторов, лежащих друг к другу ближе, чем к другим, отображает результат в виде цветовой заливки областей, визуально разделённых границами пропорционального расстояния, а также поддерживает редактирование и удаление генераторов в реальном времени.

Алгоритм (рис. 7) реализует последовательную обработку пикселей изображения с учётом взвешенных расстояний до каждого генератора. После инициализации пользователь выбирает тип добавляемого генератора и его параметры. Выбранный геометрический объект добавляется в список генераторов сцены. Для текущего пикселя рассчитывается взвешенное расстояние до каждого генератора. Пиксель получает цвет того генератора, до которого его взвешенное расстояние оказалось наименьшим. Это визуализирует границу между зонами влияния разных объектов. Если остались незакрашенные пиксели, происходит переход к следующему пикселю. Алгоритм завершает работу после окрашивания всех пикселей.

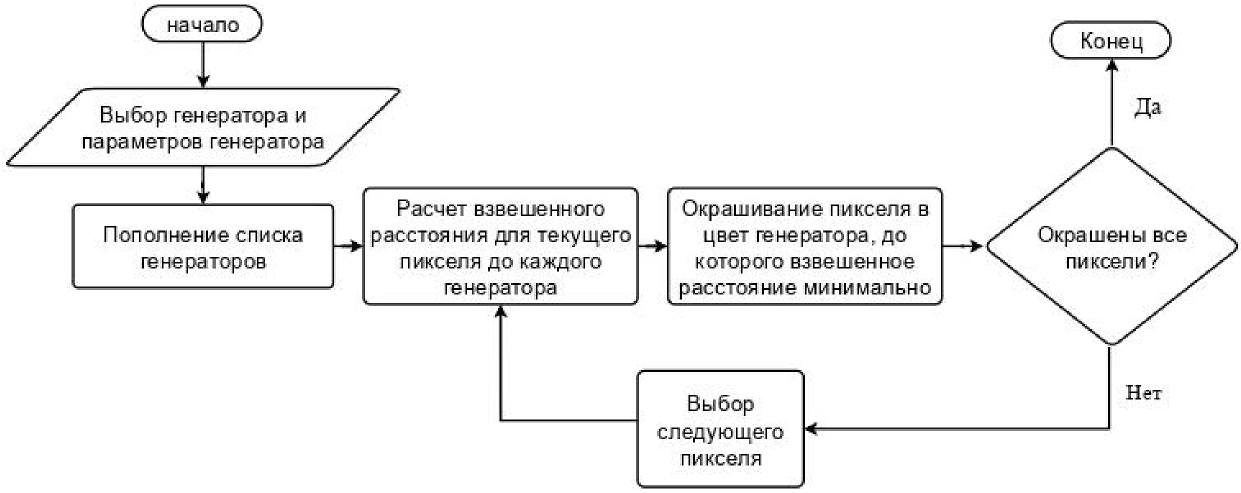

Рис. 7. Блок-схема алгоритма

Далее будут рассмотрены особенности реализации генераторов различных типов и методы вычисления взвешенных расстояний.

Моделирование генераторов ГМТ

Генераторы геометрических мест точек представляют собой исходные геометрические объекты, от которых рассчитываются расстояния до каждой точки на плоскости с учётом заданных весов. Система поддерживает как элементарные, так и более сложные типы генераторов.

Для реализации разработана объектно-ориентированная структура, основанная на использовании абстрактного базового класса Generator (табл. 1). Этот класс определяет единый интерфейс и набор общих свойств для всех типов генераторов, обеспечивая расширяемость системы.

Таблица 1

Описание абстрактного класса генератора

```
abstract class Generator
{
 public Point Location { get; set; }
 public Color Color { get; set; }
 public double Coefficient { get; set; } = 1.0;
 public abstract double GetEffectiveDistance(int x, int y);
 public abstract string GetDescription();
}
```

Location - базовая точка, характеризующая положение геометрического объекта. Для различных типов генераторов она может означать, например, центр окружности или одну из ключевых точек сплайна. Color - цвет, используемый для визуализации области, соответствующей 8 данному генератору на диаграмме. Coefficient - вес, используемый при вычислении взвешенного расстояния до генератора. Позволяет моделировать взвешенные диаграммы Вороного. GetEffectiveDistance(int x, int y) - метод, возвращающий взвешенное расстояние от произвольной точки с координатами (x, y) до соответствующего генератора. GetDescription() - метод, возвращающий строковое описание генератора, используемое в пользовательском интерфейсе.

Точка является наиболее простым типом генераторов. Расстояние до точки считается как евклидово и затем корректируется значением веса (табл. 2).

Таблица 2

Описания класса точки

```
class PointGenerator : Generator
{
 public override double GetEffectiveDistance(int x, int y)
 {
 double dx = x - Location.X;
 double dy = y - Location.Y;
 double distanceSquared = dx * dx + dy * dy;
 return distanceSquared / Coefficient;
 }
 public override string GetDescription()
 {
 return $"Точка ({Location.X}, {Location.Y}), коэф.: {Coefficient:F2}";
 }
}
```

Каждый конкретный тип генератора реализует собственную логику вычисления расстояния в методе GetEffectiveDistance в соответствии с геометрической природой объекта.

Алгоритм построения обобщённо-взвешенной диаграммы Вороного

Следующая блок-схема иллюстрирует алгоритм расчёта взвешенного расстояния от текущего пикселя до генераторов различного типа в процессе построения обобщённой диаграммы Вороного (рис. 8).

В начале алгоритма из списка генераторов выбирается очередной, для которого будет рассчитано расстояние. Затем идет проверка типа генератора. Если геометрические объекты – точка, окружность, прямая, то расстояние считается по соответствующим формулам, описанным ранее. Если ни одно из условий выше не выполнено, предполагается, что генератор задан в виде сплайна или ломаной и рассчитывается в соответствии с блок схемой, представленной на рис. 9. Вычисленное расстояние сравнивается с текущим минимальным и если оно меньше, то значение минимального расстояния обновляется. Если расстояние рассчитано для всех генераторов, процесс завершён. В противном случае выбирается следующий генератор, и процесс повторяется.

После завершения итерации по всем генераторам, возвращается ближайший генератор с минимальным взвешенным расстоянием для текущей точки.

Если генератор – сплайн, то в этом случае выполняется его аппроксимация (представление его в виде конечного набора отрезков, то есть замкнутой ломаной) и расчёт взвешенного расстояния до ближайшей его точки или отрезка (рис. 9).

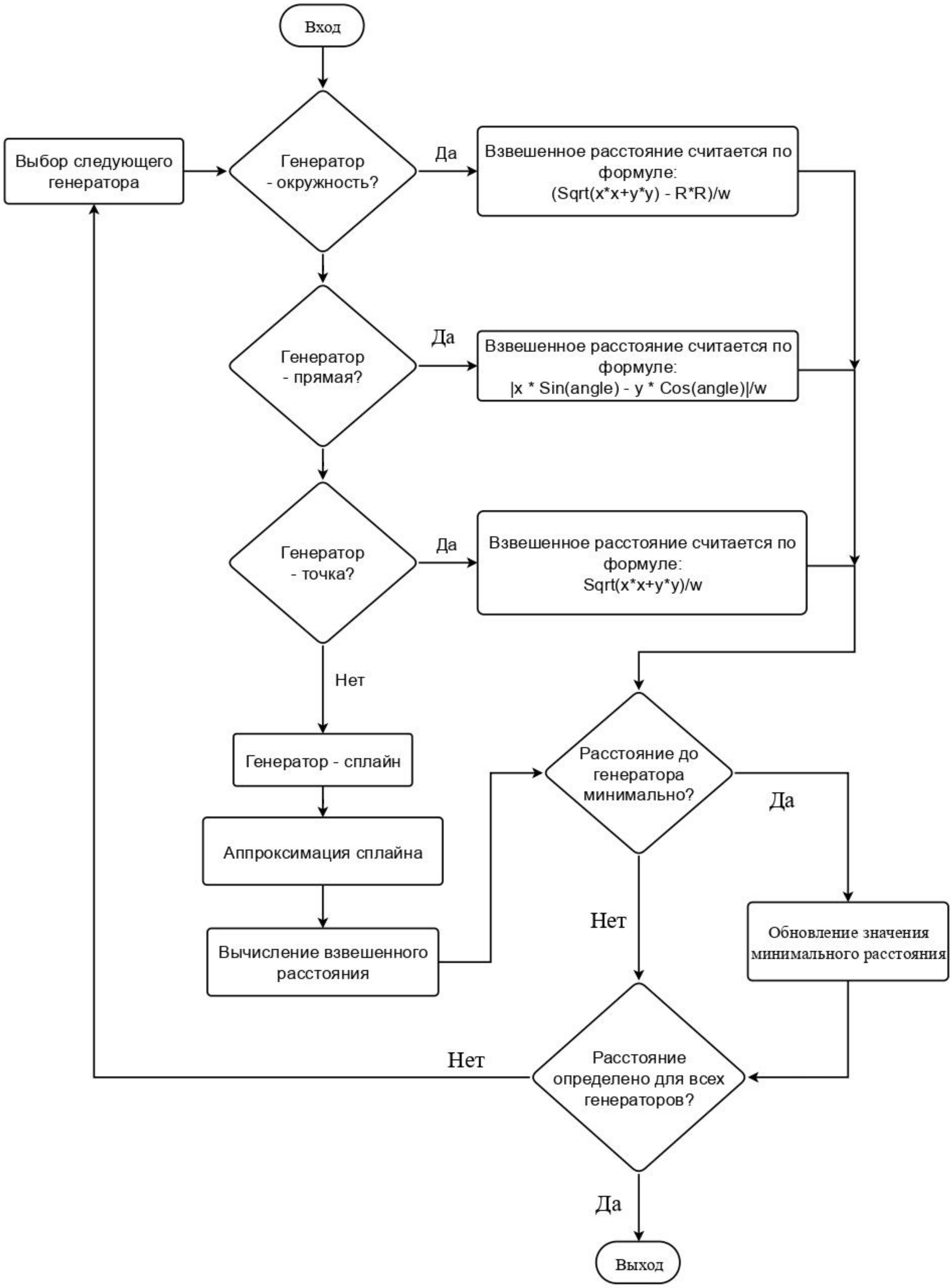

Рис. 8. Блок схема для расчета взвешенного расстояния до генератора

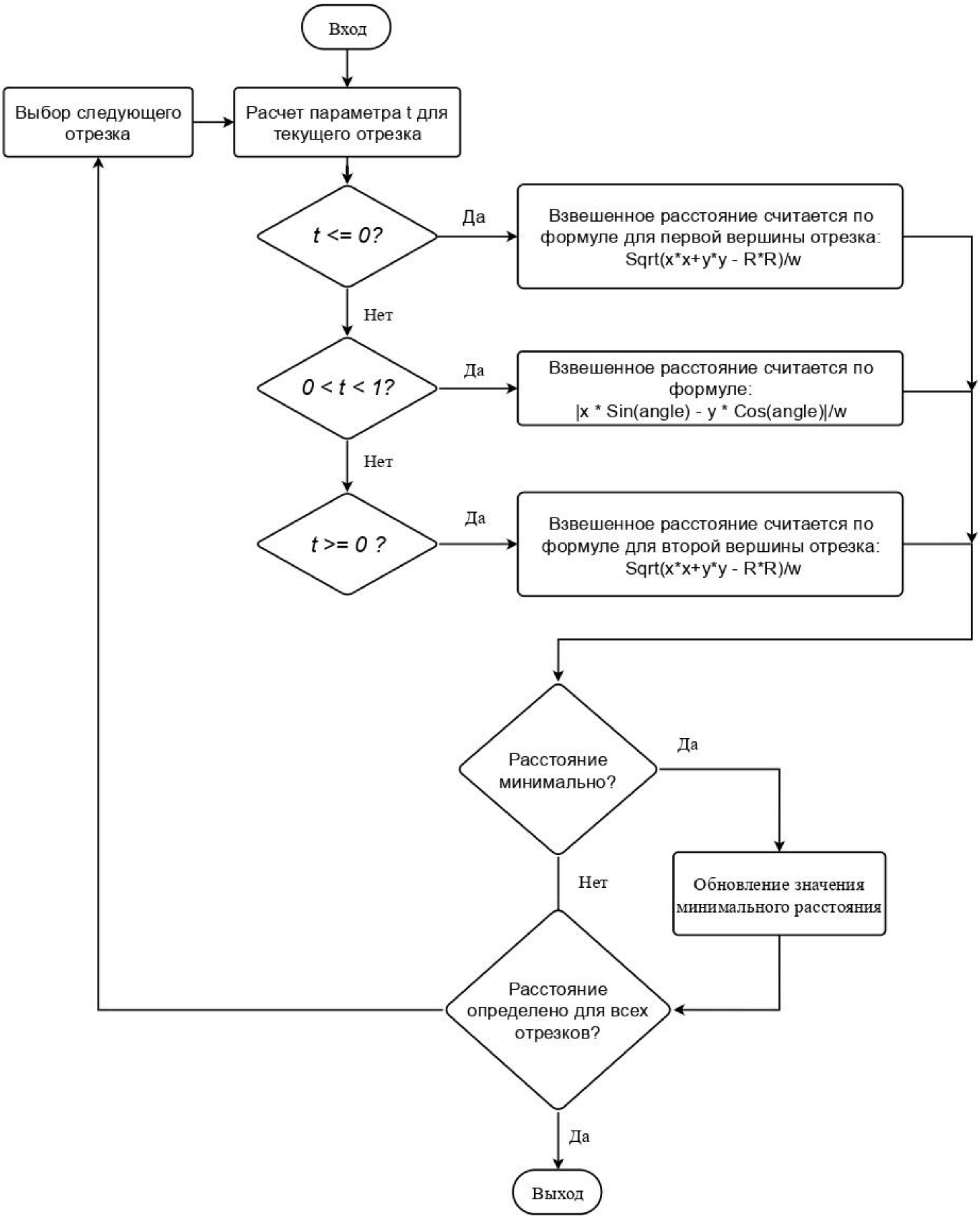

Рис. 9. Блок схема для расчета взвешенного расстояния до ломаной

В данном случае (рис. 9) каждый отрезок, принадлежащий контуру, считается отдельным генератором, для каждого из которых определяется значение параметра t – величина, задающая положение проекции точки на отрезке. Если значение t от 0 до 1, то считается, что проекция точки лежит на отрезке и минимальное расстояние до него считается как длина перпендикуляра, опущенного на отрезок. Если значение t меньше 0 или больше 1, то считается, что минимальное расстояние до отрезка – это расстояние от текущего пикселя до вершин отрезов. Далее сравнивается текущее вычисленное расстояние с уже найденным минимальным и если оно меньше, то значение минимального расстояния обновляется. Если все отрезки обработаны, процедура завершается, иначе происходит расчет для следующего отрезка. На выходе возвращается минимальное взвешенное расстояние от текущей точки до замкнутого сплайна (или ломаной).

Применение системы для модерирования геометрических мест точек, пропорционально удалённых от геометрических объектов

Рассмотрим некоторые примеры моделирования геометрических мест точек, пропорционально уделенных от некоторых геометрических объектов. Если на сцене будут в качестве генераторов присутствовать одни точки, то это будет классическая диаграмма Вороного (рис. 10).

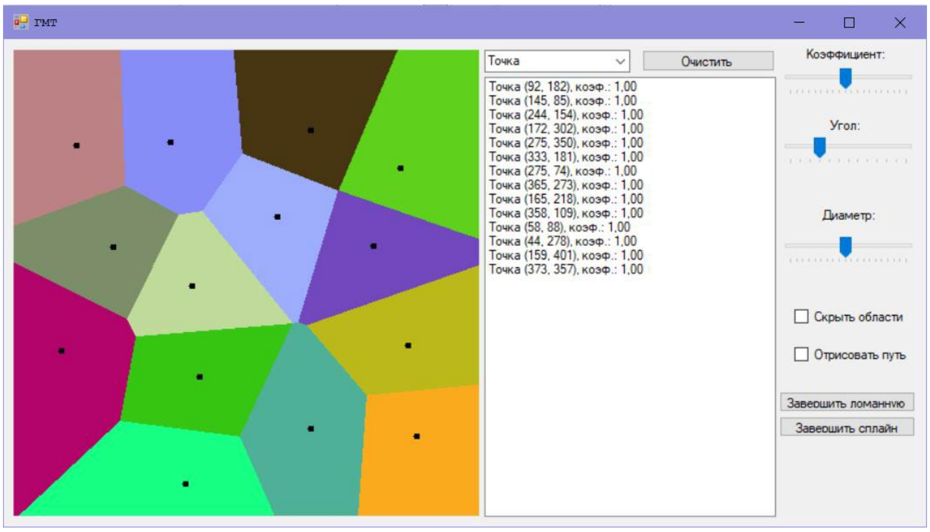

Рис. 10. Классическая диаграмма Вороного

Если же для каждой точки мы будем изменять вес, то мы будем иметь дело с взвешенной диаграммой Вороного (рис. 11).

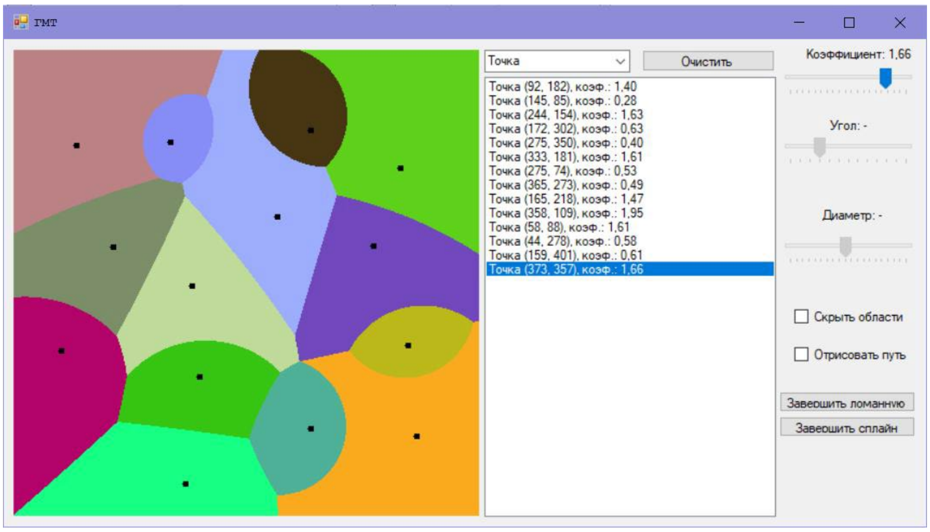

Рис. 11. Взвешенная диаграмма Вороного

Каждая кривая, формируемая на изображении, является дугой окружности Аполлония. Если же веса соседних генераторов одинаковы, то дуга вырождается в прямую. Если исходные объекты – пара прямых, то их ГМТ будут также пара прямых (рис. 12), вырождающихся в одну, если прямые будут параллельными (при любых значениях весов).

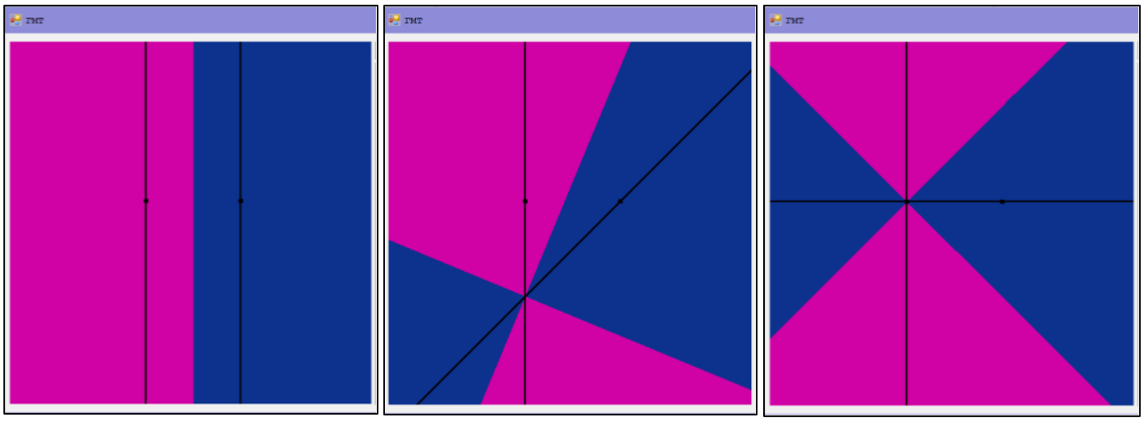

Рис. 12. Геометрическое место точек, пропорционально удаленных от пары прямых

Если исходные объекты – точка и прямая, то их ГМТ будут кривые второго порядка (рис. 13).

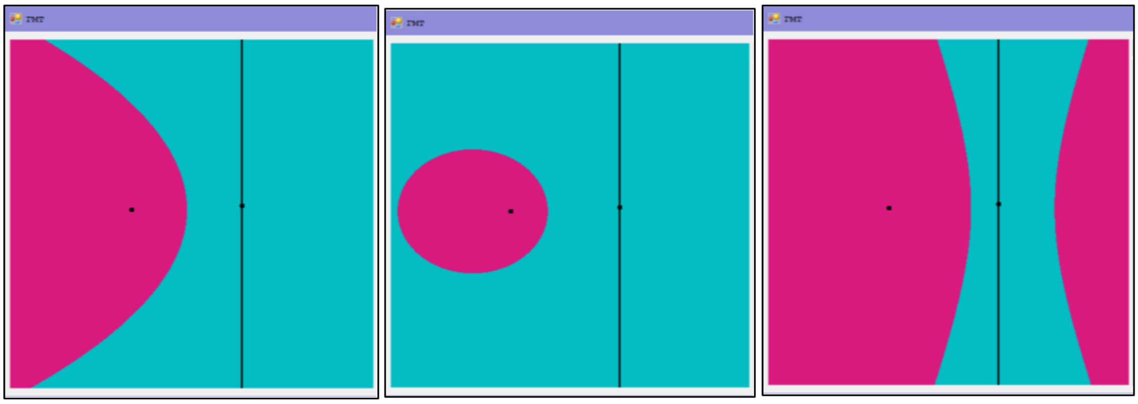

Рис. 13. Геометрическое место точек, пропорционально удаленных от точки и прямой

Если веса объектов равны, то эта кривая является параболой. Если вес прямой больше веса точки, то кривая – эллипс, если наоборот – гипербола. Программа визуализирует обобщенную диаграмму Вороного (рис. 14):

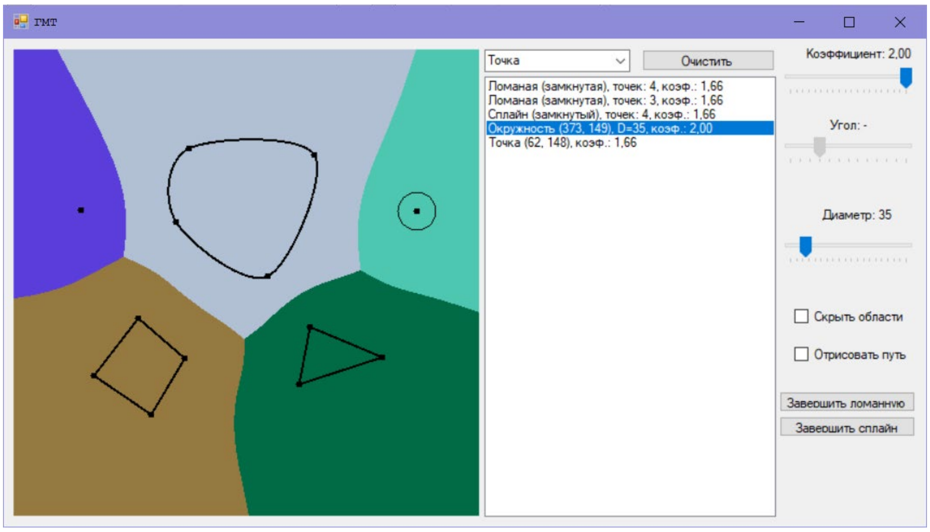

Рис. 14. Обобщенная диаграмма Вороного

На рис. выше в сцене присутствуют такие геометрические объекты как точка, две замкнутые ломаные (четырехугольник и треугольник), окружность и замкнутый сплайн. Веса для всех объектов одинаковые, а значит и границы являются равноудаленными.

Система позволяет визуализировать обобщенно-взвешенные диаграммы Вороного, где каждому геометрическому объекту присваивается вес, величина которого определяет степень влияния генератора на моделируемую сетку (рис. 15).

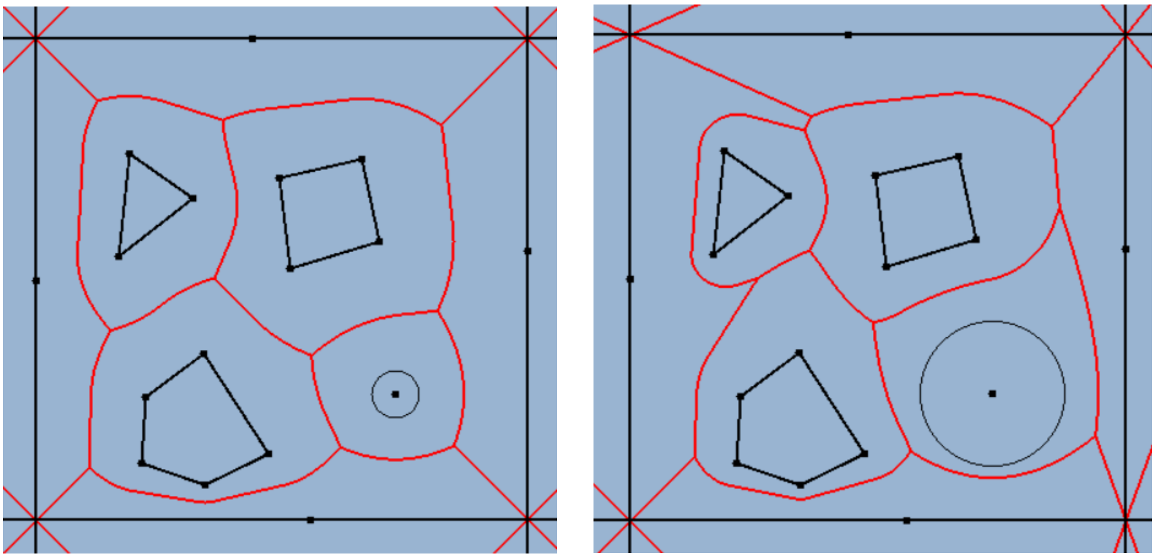

Рис. 15. Обобщенно-взвешенная диаграмма Вороного

Тем самым с помощью веса можно задавать насколько ближе или дальше к генератору будет располагаться моделируемая траектория.

По итогу мы имеем систему моделирования геометрических мест точек, пропорционально удаленных от пары геометрических объектов, которая способна моделировать различные виды диаграмм Вороного, а также дает возможность для добавления новых геометрических объектов и продолжения исследования ГМТ, равноудаленных от различных пар геометрических объектов [5-6].

Заключение

В ходе исследования были изучены методы моделирования геометрических мест точек, равно- или пропорционально удалённых от пары геометрических объектов, а также разработан соответствующий алгоритм их построения. Проведён анализ ГМТ для ключевых комбинаций объектов, включая пары точек, прямых и их сочетания.

На основе метода взвешенного биссектора создана система графического моделирования обобщённо-взвешенной диаграммы Вороного. Система поддерживает интерактивное управление: добавление объектов, настройку их параметров и визуализацию результатов в реальном времени.

Литература

1. Ауренхаммер Ф. Диаграммы Вороного / Ф. Ауренхаммер, Р. Кляйн. – Хаген: Университет Хаген (FernUniversität in Hagen), 1996. – 101 с.
2. Вышнепольский В.И. Геометрические места точек, равноотстоящих от двух заданных геометрических фигур. часть 4: геометрические места точек, равноудаленных от двух сфер / В.И. Вышнепольский, Е.В. Заварихина, Д.С. Пех // Геометрия и графика. – 2021. – Т. 9, № 3. – С. 12-29. – DOI 10.12737/2308-4898-2021-9-3-12-29. – EDN WGHOZY.
3. Вышнепольский В.И. Геометрические места точек, равноотстоящих от двух заданных геометрических фигур. часть 5: геометрические места точек, равноудаленных от сферы и плоскости / В.И. Вышнепольский, Е.В. Заварихина, К.Т. Егиазарян // Геометрия и графика. – 2021. – Т. 9, № 4. – С. 22-34. – DOI 10.12737/2308-4898-2022-9-4-22-34. – EDN MGDBLH.
4. Киселёв А.П. Элементарная геометрия: книга для учителя / А.П. Киселёв – Москва: Просвещение, 1980. – 287 с.: ил. – ISBN 978-0977985203.

5. Лазарев К.В. Принципы параметрического построения архитектурной формы на основе биологических структур / К.В. Лазарев, Е.Д. Енютина // Традиции и инновации в строительстве и архитектуре. Архитектура и градостроительство: сборник научных трудов. – 2021. – С. 367-378.
6. Такахаши О. Планирование движения на плоскости с использованием обобщенных диаграмм Вороного / О. Такахаши, Р.Дж. Шиллинг // IEEE Transactions on Robotics and Automation. – 1989. – Том 5, № 2. – С. 143-150.