УДК 334.7

НИР. Экономика фирмы (№ 3 (52), 2025). 112: 78–82

Динамическая модель оптимизации работы предприятия

Dynamic Model of Optimization of Enterprise Operations

DOI 10.12737/2306-627X-2025-14-3-78-82 Получено: 11 августа 2025 г. / Одобрено: 17 августа 2025 г. / Опубликовано: 25 сентября 2025 г.

Черняев А.П.

Д-р физ.-мат. наук, профессор, ФГАОУ ВО «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)»,
г. Москва

Сухорукова И.В.

Д-р экон. наук, профессор, ФГБОУ ВО «Российский экономический университет имени Г.В. Плеханова»,
г. Москва

Меерсон А.Ю.

Канд. физ.-мат. наук, доцент, ФГБОУ ВО «Российский экономический университет имени Г.В. Плеханова»,
г. Москва

Chernyaev A.P.

Doctor of Physical and Mathematical Sciences,
Professor,
Moscow Institute of Physics and Technology,
Moscow

Sukhorukova I.V.

Doctor of Economic Sciences, Professor,
Plekhanov Russian University of Economics,
Moscow

Meerson A.U.

Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Plekhanov Russian University of Economics,
Moscow

Аннотация

Актуальность представленного исследования базируется на разработке математической модели, позволяющей провести оптимизацию экономической деятельности предприятия, выпускающего однородную типовую продукцию. Бизнес-план предприятия предполагает процесс выпуска одного приоритетного вида продукции по сравнению с остальными типами. Указанная бизнес-стратегия предполагает постановку и решение конкретных проблем, определяемых увеличением объема выпуска одной конкретной номенклатуры товара. Концентрация производства требует разработки математически обоснованной модели, позволяющей устранить экономические издержки и потери, связанные со специализацией производственного цикла для однотипной продукции. При построении математической модели учитываются связанные со спецификой производства изменения стоимостных рыночных тарифов. Одним из основополагающих параметров является временной фактор, позволяющий проводить структурные модификации в динамике. В условиях цифровизации экономической структуры предприятия целесообразно привлекать системы искусственного интеллекта. Математическим инструментарием для их создания и является представленная работа. Математический аппарат модели содержит аналитические методы решения задач для различных обыкновенных дифференциальных уравнений. Предполагаемый финансовый источник развития производственного процесса на рассматриваемом предприятии представляет внутренние и внешние инвестиции. Основной экономический показатель – себестоимость производства, которая рассчитывается в деньгах для одной единицы продукции, считается зависящей от времени и выходящей на насыщение. Таким же по характеру зависящим от времени и выходящим на насыщение считается коэффициент износа – аналитический показатель, который показывает степень изношенности основных средств и определяется как отношение суммы начисленной амортизации к первоначальной стоимости основных средств. Аналогично рассматривается совокупный фактор производства, как результат факторного анализа, выбывший за единицу времени. При построении математической модели учитывается зависимость показателя доли инвестиций в основной капитал в валовом продукте, являющегося аналогом нормы накопления инвестиций, при этом коэффициенты линейной производственной функции предполагаются не постоянными, а зависящими от времени.

Ключевые слова: предприятие, однородная продукция, экономические характеристики, обыкновенные дифференциальные уравнения, динамическая модель.

Abstract

The relevance of the presented study is based on the development of a mathematical model that allows for optimization of the economic activity of an enterprise producing homogeneous standard products. The enterprise business plan assumes the process of producing one priority type of product compared to other types. The specified business strategy involves setting and solving specific problems determined by an increase in the output of one specific product range. Concentration of production requires the development of a mathematically sound model that allows eliminating economic costs and losses associated with the specialization of the production cycle for homogeneous products. When constructing a mathematical model, the cost market tariffs associated with the specificity are taken into account. One of the fundamental parameters is the time factor, which allows for structural modifications in dynamics. In the context of digitalization of the economic structure of an enterprise, it is advisable to involve artificial intelligence systems. The presented work is the mathematical tool for their creation. The mathematical apparatus of the model contains analytical methods for solving problems for various ordinary differential equations. The expected financial source of development of the production process at the enterprise under consideration is internal and external investments. The main economic indicator is the cost of production, which is calculated in money for one unit of production, is considered to be time-dependent and reaching saturation. The depreciation coefficient is considered to be of the same nature, time-dependent and reaching saturation – an analytical indicator that shows the degree of depreciation of fixed assets and is defined as the ratio of the amount of accrued depreciation to the original cost of fixed assets. The total factor of production is considered similarly, as a result of factor analysis, which is eliminated per unit of time. When constructing a mathematical model, the dependence of the indicator of the share of investments in fixed capital in the gross product, which is an analogue of the rate of accumulation of investments, is taken into account, while the coefficients of the linear production function are assumed not to be constant, but time-dependent.

Keywords: enterprise, homogeneous products, economic characteristics, ordinary differential equations, dynamic model.

ВВЕДЕНИЕ

Бизнес-план предприятия предполагает процесс выпуска одного приоритетного вида продукции по сравнению с остальными типами. Указанная бизнес-стратегия предполагает постановку и решение конкретных проблем, определяемых увеличением объема выпуска одной номенклатуры товара. Концентрация производства требует разработки математически обоснованной модели, позволяющей устранить экономические издержки и потери, связанные со специализацией производственного цикла для однотипной продукции. При построении математической модели учитываются связанные со спецификой производства изменения стоимостных рыночных тарифов. Одним из основополагающих параметров является временной фактор, позволяющий проводить структурные модификации в динамике. В условиях цифровизации экономической структуры предприятия целесообразно привлекать системы искусственного интеллекта. Математическим инструментарием для их создания и является представленная работа. Математические модели предприятия в основном рассматривались при постоянных экономических характеристиках. Основная экономическая характеристика – себестоимость производства, которая рассчитывается в деньгах для одной единицы продукции, в настоящей работе считается зависящей от времени и выходящей на насыщение [1–2]. Таким же по характеру, зависящим от времени и выходящим на насыщение, считается коэффициент износа – аналитическая характеристика, которая показывает степень изношенности основных средств производства и определяется как отношение суммы начисленной амортизации к первоначальной стоимости основных средств производства исследуемого в работе предприятия [3–5]. Предполагается, что подвержен такой же зависимости и совокупный фактор производства как результат факторного анализа, выбывший за единицу времени [6]. Так же предполагается, что подвержен аналогичной зависимости и показатель доли инвестиций в основной капитал в валовом продукте – аналог нормы накопления инвестиций [7–8].

Все перечисленные экономические факторы производства ранее преимущественно предполагались постоянными [8]. Постоянными считались даже параметры производственных функций. В настоящей статье перечисленные экономические характеристики предполагаются зависящими от времени и выходящими на насыщение при больших временах. Для изучения описанной математической модели сначала ставится и решается задача Коши для общего количества однородной продукции предприятия в произвольный момент времени. Затем, привлекается однофакторная производственная функция в общем виде. И, наконец, рассматривается пример, когда производственная функция линейна.

МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

Математическую базу исследования составляют качественная теория обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, которые выводятся из уравнений баланса для различных экономических характеристик предприятия. В основном для обыкновенных дифференциальных уравнений баланса рассматриваются различные модификации задач Коши.

РЕЗУЛЬТАТЫ

Результаты настоящей работы удобно разделить на три группы.

Первую группу результатов целесообразно назвать: **Динамика роста общего количества однородной продукции предприятия.**

Предположим, предприятие выпускает однородную продукцию в количестве $U(t)$ в момент времени t. Тогда за промежуток времени $(t, t + \Delta t)$ это предприятие выпустит $U(t + \Delta t) - U(t) = \Delta U(t)$ продукции. Пусть прирост выпущенной продукции пропорционален недоиспользованной мощности выпуска $U_m - U(t)$, где U_m – максимально возможный выпуск продукции предприятием, тогда

$$\Delta U(t) = k(t)\left[U_m - U(t)\right]\Delta t .$$

Здесь $k(t)$ – коэффициент пропорциональности. Поделив обе части последнего равенства на Δt, переходя к пределу при $\Delta t \to 0$ и предполагая дифференцируемость функции $U(t)$, получим

$$\frac{dU}{dt} = k(t)\left[U_m - U(t)\right]. \qquad (1.1)$$

Учитывая неравенство $U_m > U(t)$ из формулы (1.1), имеем

$$\frac{dU}{U_m - U(t)} = k(t)dt .$$

Интегрируя последнее, будем иметь

$$-\ln\left[U_m - U(t)\right] + \ln|C| = \ln\left|\frac{C}{U_m - U(t)}\right| = \int_{t_0}^{t} k(\tau)d\tau ,$$

$$C = \text{const}$$

Из последнего получим

$$\left|\frac{C}{U_m - U(t)}\right| = e^{\int_{t_0}^{t} k(\tau)d\tau} ,$$

откуда

$$\left|\frac{U_m - U(t)}{C}\right| = e^{-\int_{t_0}^{t} k(\tau)d\tau} . \qquad (1.2)$$

Учитывая начальное условие

$$U(t_0) = U_0 > 0 \qquad (1.3)$$

из формулы (1.2), имеем

$$C = U_m - U_0 .$$

Подставляя последнее в формулу (1.2), получим

$$\frac{U_m - U(t)}{U_m - U_0} = e^{-\int_{t_0}^{t} k(\tau)d\tau}.$$

Последнее легко упростить

$$U_m - U(t) = \left[U_m - U_0\right] e^{-\int_{t_0}^{t} k(\tau)d\tau},$$

откуда легко выразить $U(t)$

$$U(t) = U_m - \left[U_m - U_0\right] e^{-\int_{t_0}^{t} k(\tau)d\tau}. \qquad (1.4)$$

Из формулы (1.4) следует, что для того, чтобы было выполнено условие

$$\lim_{t \to +\infty} U(t) = U_m \qquad (1.5)$$

нужно, чтобы было выполнено условие

$$\int_{t_0}^{+\infty} k(\tau)d\tau = +\infty. \qquad (1.6)$$

Расходимость интеграла в левой части (1.6) следует из (1.3), (1.4) и (1.5).

Формулу (1.4) можно представить несколько другим образом

$$U(t) = U_m - \left[U_m - U_0\right] e^{-\int_{t_0}^{t} k(\tau)d\tau} = U_m \quad 1 \quad e$$

$$= U_m \left(1 - e^{-\int_{t_0}^{t} k(\tau)d\tau}\right) + U_0 e^{-\int_{t_0}^{t} k(\tau)d\tau}. \qquad (1.7)$$

При этом скорость освоения предприятием производственных мощностей будет выражаться следующим образом

$$\frac{dU(t)}{dt} = -\left[U_m - U_0\right] e^{-\int_{t_0}^{t} k(\tau)d\tau} (-k(t)) = k \;\; t \quad U$$

$$= k(t)\left[U_m - U_0\right] e^{-\int_{t_0}^{t} k(\tau)d\tau}. \qquad (1.8)$$

В начальной точке скорость роста освоения предприятием производственных мощностей согласно формуле (1.8) будет иметь вид

$$\left.\frac{dU(t)}{dt}\right|_{t=t_0} = k(t_0)\left[U_m - U_0\right] e^{-\int_{t_0}^{t} k(\tau)d\tau}. \qquad (1.9)$$

В случае постоянного коэффициента пропорциональности прироста выпущенной продукции недоиспользованной мощности выпуска

$$k(t_0) = k_0$$

благодаря тому, что

$$e^{-\int_{t_0}^{t} k(\tau)d\tau} = e^{-k_0(t-t_0)}.$$

формула (1.4) упрощается

$$U(t) = U_m - \left[U_m - U_0\right] e^{-k_0(t-t_0)}$$

и расходимость интеграла (1.6) не нарушается. При этом упрощаются: формула (1.7)

$$U(t) = U_m\left(1 - e^{-k_0(t-t_0)}\right) + U_0 e^{-k_0(t-t_0)},$$

формула (1.8)

$$\frac{dU(t)}{dt} = k_0\left[U_m - U_0\right] e^{-k_0(t-t_0)}$$

и формула (1.9)

$$\left.\frac{dU(t)}{dt}\right|_{t=t_0} = k_0\left[U_m - U_0\right].$$

Вторую группу результатов удобно назвать: **Математическая модель предприятия, выпускающего однородную продукцию при однофакторной производственной функции общего вида**

Для однофакторной производственной функции в общем виде и объема выпуска однородной продукции предприятием $U = U(t)$ *справедлива формула*

$$U(t) = P(t) f(r(t)). \qquad (2.1)$$

В формуле (2.1) себестоимость продукции обозначена как $P = P(t)$, а единичный объем ресурса – как $r = r(t)$. Функции $P = P(t)$ и $r = r(t)$ считаются непрерывно дифференцируемыми и ограниченными на открытой числовой полуоси $0 < t < +\infty$. Функция одной переменной f также считается непрерывно дифференцируемой по своему аргументу. В качестве единицы измерения времени t используется рыночный период, соответствующий обстоятельствам (месяц, квартал, год). Ограниченная функция $r = r(t)$ должна удовлетворять неравенству: $r_0 < r(t) < r_\infty$.

В последнем неравенстве, а также в выражениях $r(t)\big|_{t=t_0} = r_0$, и $r(t)\big|_{t=+\infty} = r_\infty$. Можно заметить, что значение $r(t)\big|_{t=+\infty} = r_\infty$ может быть как конечным, так и бесконечным. Чтобы описать работу предприятия необходимо рассмотреть уравнение баланса для фактора производства $r = r(t)$. Изменение объема производственного ресурса за короткий период Δt

$$\Delta r = r(t+\Delta t) - r(t)$$

можно выразить через два компонента:

$$\Delta r(t) = \Delta r_D(t) + \Delta r_I(t)\,. \qquad (2.2)$$

В (2.2) $\Delta r_D(t)$ – это процесс старения производственного ресурса, а $\Delta r_I(t)$ – его восстановление благодаря инвестициям в предприятие.

За период времени Δt износ части ресурса $\Delta r_D(t)$ составляет:

$$\Delta r_D(t) = -D(t)r(t)\Delta t\,. \qquad (2.3)$$

В (2.3) $D(t)$ – показатель степени износа.

Изменение второго компонента (2.2) $\Delta r_D(t)$ за временной интервал Δt можно выразить следующим образом:

$$\Delta r_I(t) = I(t)\Delta t\,,$$

или

$$\Delta r_I(t) = B(t)U(t)\Delta t\,.$$

В тот момент t были вложены средства в объеме $I(t) = B(t)U(t)$. Это и есть $B(t)$ – норма накопления инвестиций.

Подстановка в формулу для изменения $\Delta r_I(t)$ однофакторной производственной функции (2.1) приводит к следующему результату:

$$\Delta r_I(t) = B(t)P(t)f(r(t))\Delta t\,. \qquad (2.4)$$

Подставив выражения (2.3) и (2.4) в уравнение баланса (2.2), мы получаем следующее:

$$\Delta r(t) = [-D(t)r(t) + B(t)P(t)f(r(t))]\Delta t\,. \qquad (2.5)$$

Преобразуем уравнение (2.5), разделив обе его части на Δt. Затем, переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, в преобразованном уравнении (2.5), получаем нелинейное дифференциальное уравнение:

$$\frac{dr(t)}{dt} = -D(t)r(t) + B(t)P(t)f(r(t))\,. \qquad (2.6)$$

Равенство (2.6) существенным образом отличается от аналогичных уравнений своим общим видом и не может быть проинтегрировано в квадратурах.

Третью группу результатов назовем: **Математическая модель предприятия, выпускающего однородную продукцию при однофакторной линейной производственной функции**

В качестве примера рассмотрим производственную функцию

$$f(r) = a_0 + a_1 r,\ a_0 = a_0(t) > 0,$$

$$a_1 = a_1(t) > 0. \qquad (3.1)$$

Подставляя (3.1) в уравнение (2.6) получим

$$\frac{dr}{dt} = -Dr + BP(a_0 + a_1 r) = (BPa_1 - D)r + BPa_0\,. \qquad (3.2)$$

Уравнение (3.2) линейное с начальным условием

$$r(t)\big|_{t=t_0} = r_0\,. \qquad (3.3)$$

Решая его стандартным методом с учетом (3.3), будем иметь

$$r = e^{\int_{t_0}^{t}(BPa_1 - D)d\tau}\left[r_0 + \int_{t_0}^{t} BPa_0 e^{-\int_{t_0}^{s}(BPa_1 - D)d\tau} ds\right]. \qquad (3.4)$$

ОБСУЖДЕНИЕ И ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Уравнение баланса (2.6) демонстрирует, что для успешного развития компании необходимо выполнение условия

$$\frac{dr(t)}{dt} \geq 0\,.$$

В экономическом плане это означает, что сумма вложений больше суммы средств, которые идут на восстановление изношенных активов.

Совершенно ясно, что для отыскания $r(t)\big|_{t=+\infty} = r_\infty$ надо найти в случае (3.1) предел правой части (3.4) при $t = +\infty$. Этот предел может быть, как конечным, так и бесконечным. Бесконечным он может быть чисто теоретически. Все зависит от задания таких функций, как стоимость продукции, произведенной на единичный объем ресурса, коэффициента амортизации, доли выбывшего за единицу времени объема фактора производства, нормы накопления внутренних инвестиций, коэффициентов производственной функции (3.1). Практически, поскольку этих функций конечное число, то найдется момент времени, после которого эти функции выйдут на насыщение, и предел $r(t)\big|_{t=+\infty} = r_\infty$ будет конечным. Если в результате расчетов получается бесконечная величина, то значит не достигнут временной порог выхода на насыщение отмеченных выше функций.

Литература

1. *Витинская А.В., Захарова Я.А., Нечаев О.Н.* Моделирование экономической динамики операционного сегмента предприятия на основе однородных разностных уравнений второго порядка // Modern Economy Success. 2024. № 3. С. 230-238.
2. *Земсков В.В.* Норма накопления как фактор обеспечения экономической безопасности // Вестник института мировых цивилизаций. Т. 11 № 4 (29) 2020. С. 92–98.
3. *Ильина Е.А.* Влияние транзакционных издержек производственного предприятия на формирование его прибыли // Вестник Самарского университета. Экономика и управление. 2020. Т. 11, № 1 С. 144–152.
4. *Маслов Г.А.* Новые технологии – новый взгляд на корпоративное планирование // Научные труды Вольного экономического общества России. 2020. Т. 224. № 4. С. 354–362.
5. *Сараев Л.А., Юкласова А.В.* Модель динамики развития валового регионального продукта, учитывающая взаимодействие санкционных рестриктий и инновационной активности предприятий промышленного потенциала региона // Вестник Самарского университета. Экономика и управление. 2024. Т.15,№ 2. С.55–66.
6. *Черняев А.П., Сухорукова И.В., Фомин Г.П., Меерсон А.Ю.* Построение модели управления с ограничениями в микроэкономических системах // Азиатско-тихоокеанский регион: экономика, политика, право. 2021. Т. 23. № 1. С. 15–26.
7. *Chernyaev A.P., Meerson A.Yu., Sukhorukova I.V., Fomin G.P.* Methods for optimal separation of income in consumable and accumulated parts international journal of recept // Power Technology and Engineering. 2020. № 8. С. 797.
8. *Chernyaev A.P., Meerson A.Yu., Sukhorukova I.V., Fomin G.P.* Features of mathematical formulation and solution of the problem of optimal division of funds in the construction business // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. Buildintech bit 2020. innovations and technologies in construction. 2020. С. 012002.

References

1. Vitinskaya A.V., Zakharova Ya. A., Nechaev O.N. Modeling the economic dynamics of the enterprise's operating segment based on homogeneous second-order difference equations Modern Economy Success. 2024. No. 3. P. 230-238.
2. Zemskov V.V. Accumulation rate as a factor in ensuring economic security // Bulletin of the Institute of World Civilizations. Vol. 11 No. 4 (29) 2020. P. 92–98.
3. Ilyina E.A. The influence of transaction costs of a manufacturing enterprise on the formation of its profit // Bulletin of Samara University. Economics and Management. 2020 Vol. 11, No. 1 Pp. 144-152.
4. Maslov G.A. New technologies - a new look at corporate planning Scientific works of the Free Economic Society of Russia. 2020. Vol. 224. No. 4. P. 354-362.
5. Saraev L.A., Yuklasova A.V. Model of the dynamics of the development of the gross regional product, taking into account the interaction of sanction restrictions and innovative activity of enterprises of the industrial potential of the region // Bulletin of Samara University. Economics and Management. 2024. Vol. 15, No. 2. Pp. 55-66.
6. Chernyaev A.P., Sukhorukova I.V., Fomin G.P., Meerson A.Yu. Construction of a management model with constraints in microeconomic systems // Asia-Pacific region: economics, politics, law. 2021. Vol. 23. No. 1. P. 15-26
7. Chernyaev A.P., Meerson A.Yu., Sukhorukova I.V., Fomin G.P. Methods for optimal separation of income in consumable and accumulated parts international journal of recept // Power Technology and Engineering. 2020. No. 8. P. 797.
8. Chernyaev A.P., Meerson A.Yu., Sukhorukova I.V., Fomin G.P. Features of mathematical formulation and solution of the problem of optimal division of funds in the construction business // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. Buildintech bit 2020. innovations and technologies in construction. 2020. P. 012002.