

НАУЧНЫЕ ПРОБЛЕМЫ ГЕОМЕТРИИ

УДК 514

DOI: 10.12737/2308-4898-2024-12-1-3-11

Н.А. Сальков

Канд. техн. наук, профессор,
 Московский государственный академический
 художественный институт имени В.И. Сурикова,
 Россия, 109004, г. Москва, Товарищеский переулок, д. 30
 e-mail: nikolaysalkov@mail.ru

Расширение вариантов формирования линейчатых поверхностей

Аннотация. При решении крупных геометрических проблем в некоторых случаях имеет место необходимость решать более мелкие вспомогательные задачи. Так и при расширении вариантов формирования линейчатых поверхностей возникло решение построения плоскости или прямой под определенными углами наклона к плоскостям проекций или к некоторой заданной плоскости общего положения. В статье приводится эта сопутствующая задача на построение плоскости, а также построение прямой с использованием сферы. В основе построения плоскости и прямой под определенными углами к плоскостям проекций находится применение соприкасающегося конуса вращения к произвольно заданной сфере. Этот же способ применяется уже для построения прямой и плоскости к данной плоскости общего положения с учетом того, что данная плоскость является касательной к некоторой данной поверхности. Все построения линейчатых поверхностей основываются на принципе задания трех направляющих и трех условий, ограничивающих каждую из образующих по отношению к заданным направляющим. Условие прохождения направляющей под определенными углами к поверхностям расширяют возможности конструирования линейчатых поверхностей почти до бесконечности.

Ключевые слова: геометрия, инженерная геометрия, начертательная геометрия, метрические задачи.

N.A. Salkov

Ph.D. in Engineering, Professor,
 Moscow State Academic Art Institute named after V.I. Surikov,
 30, Tovarishcheskiy per., Moscow, 109004, Russia,
 e-mail: nikolaysalkov@mail.ru

Expansion of Formation Options Linear Surfaces

Abstract. When solving large geometric problems, in some cases there is a need to solve smaller auxiliary problems. So, when expanding the options for forming ruled surfaces, a solution arose for constructing a plane or a straight line at certain angles of inclination to the planes of projections or to some given plane of general position. The article presents this related task of constructing a plane, as well as building a straight line using a sphere. The basis for constructing a plane and a straight line at certain angles to the projection planes is the application of a contiguous cone of rotation to an arbitrarily specified sphere. The same method is already used

to construct a straight line and a plane to a given plane of general position, taking into account that this plane is tangent to some given surface. All constructions of linear surfaces are based on the principle of specifying three guides and three conditions limiting each of the generators in relation to the specified guides. The condition of passing the guide at certain angles to the surfaces expands the possibilities of designing ruled surfaces almost indefinitely.

Keywords: geometry, engineering geometry, kinetic geometry, descriptive geometry, metric tasks.

При решении вопроса расширения способов конструирования линейчатых поверхностей сопровождающимися могут быть различного рода задачи, решать которые приходится, что называется, по пути, их можно назвать задачи-попутчики, из которых иногда могут быть выявлены интересные продолжения, вырастающие иногда в собственные направления [1–9; 12–21; 23; 27; 28; 32; 34–40], в изобретения [10; 11; 32; 33] или в оформленные и зарегистрированные программы для компьютеров [29–31].

Так и в этом случае.

Предварительно, перед обращением к собственно обозначенной теме, рассмотрим задачи построения плоскости и прямой, не присутствующие в традиционном курсе начертательной геометрии. Эта задача возникла как сопутствующая.

В некоторых случаях при решении геометрических задач возникает необходимость построить плоскость или прямую под определенными углами к плоскостям проекций. Задача относится к метрическим задачам. Перед ее решением рассмотрим некоторые аспекты взаимодействия прямой с плоскостью, являющиеся взаимно перпендикулярными.

В статье предлагается способ, расширяющий возможности формирования новых линейчатых поверхностей, рассмотренных в работах [25; 26].

Дело в том, что в упомянутых работах линейчатые поверхности формировались из закона задания трех направляющих и трех условий, характеризующих положение прямолинейной образующей относительно этих направляющих. Было рассмотрено исключительно касательное положение прямолинейной образующей ко всем данным направляющим поверхностям, то есть расположенные под углом 0° к поверхностям. Теперь рассматривается вариант, когда направляющая должна быть наклонена под некоторым острым углом γ к данной поверхности.

При решении данной задачи были рассмотрены также сопутствующие задачи: построение плоскости, расположенной под заданными углами α и β к плоскостям проекций, а также прямой, расположенной под заданными острыми углами к плоскостям проекций.

Периодически и в журналах рассматриваются такие «мелкие» задачи, связанные с какими-то геометрическими нюансами или построением тех или иных геометрических фигур [1; 2; 6; 13; 22].

Некоторые решенные задачи приводят даже к изобретениям, требующим выдачи патента, поэтому нельзя пренебрегать никакими, даже маленькими, геометрическими задачами, пусть они кажутся поначалу мизерными и не стоящими внимания.

Поэтому перед исследованием задачи, которая поможет расширить варианты формирования линейчатых поверхностей, рассмотренных в работах [25; 26], решим задачу на построение плоскости.

Рассмотренная ниже задача была, как уже было сказано, сопутствующей в решении основного вопроса о расширении вариантов формирования линейчатых поверхностей, так что пренебречь ею нам показалось неразумным решением. Тем более что эта задача отсутствует в известных учебниках, хотя она и не очень сложная и может пригодиться в различных геометрических задачах, имеющих отношение как к механическим, так и к строительным специальностям.

Возьмем взаимно перпендикулярные прямую l и плоскость Σ , заданную следами. Поставим плоскость Σ в положение фронтально проецирующей плоскости (рис. 1).

Очевидно, что если плоскость Σ с плоскостью проекций будет составлять 90° , то прямая, ей перпендикулярная, будет находиться под углом 0° .

Из рис. 1 следует, что сумма углов наклона плоскости и прямой к плоскости проекций Π_1 будет равна d (90°). То есть

$$\alpha + \beta = 90^\circ. \tag{1}$$

Также очевидно, что когда мы будем вращать систему из плоскости Σ и перпендикулярной ей прямой l вокруг некоторой вертикальной (горизонтально проецирующей) оси, то углы наклона этих геометрических фигур с плоскостью проекций Π_1 не изменятся. А вот с плоскостью Π_2 углы, наоборот, будут меняться: у плоскости Σ угол будет уменьшаться, у прямой l — увеличиваться. Но в сумме эти углы, тем не менее, останутся равны 90° .

Для плоскости проекций Π_2 сумма углов наклона $\alpha' + \beta'$ плоскости Σ и прямой l по аналогии также будет равна 90° ($90^\circ + 0^\circ = 90^\circ$).

$$\alpha' + \beta' = 90^\circ. \tag{2}$$

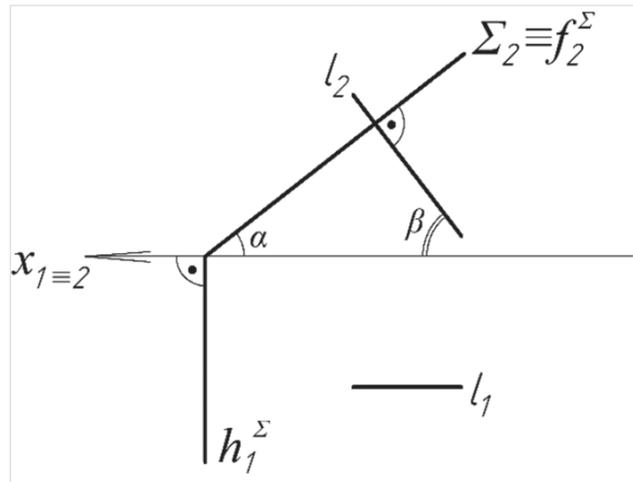


Рис. 1

Таким образом, сумма углов наклона плоскости Σ и прямой l к обеим плоскостям проекций Π_1 и Π_2 будет равна $2d$:

$$\alpha + \beta + \alpha' + \beta' = 180^\circ. \tag{3}$$

Кроме того, если взять только плоскость, то сумма углов наклона ее к плоскостям проекций Π_1 и Π_2 варьируется от 90° до 180° . При этом 90° имеет место только при положении, когда данная плоскость перпендикулярна профильной плоскости проекций. А 180° — когда она ей параллельна. Во всех случаях для плоскости имеет место неравенство:

$$90^\circ \leq \alpha + \alpha' \leq 180^\circ. \tag{4}$$

Для прямой линии имеем следующее неравенство:

$$0^\circ \leq \beta + \beta' \leq 90^\circ. \tag{5}$$

Учитывая это, и будем решать поставленную задачу.

Пусть надо построить плоскость, расположенную под углом $\alpha = 45^\circ$ к Π_1 и углом $\beta = 60^\circ$ к Π_2 . Будем использовать свойства сферы.

На рис. 2 и 3 показаны сферы с соприкасающимися с ними конусами.

На рис. 2 у конуса с вершиной S образующие имеют с плоскостью Π_1 угол наклона α . Любая плоскость, касающаяся конуса по его образующей, будет

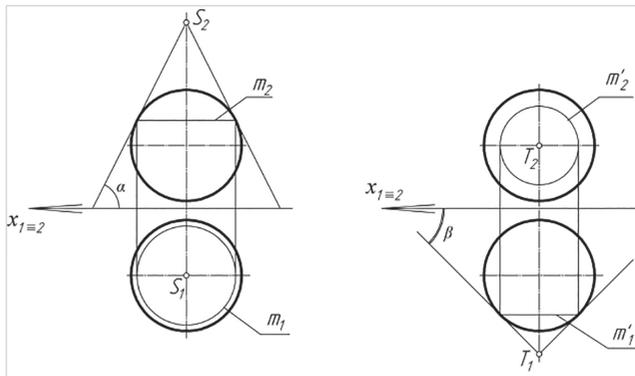


Рис. 2

Рис. 3

иметь с плоскостью Π_1 угол наклона (ската) α . На рис. 3 имеем конус с вершиной в точке T , соприкасающийся с данной сферой, и образующие которого имеют с плоскостью проекций Π_2 угол наклона β . Здесь также любая плоскость, касающаяся конуса, будет иметь с плоскостью Π_2 угол наклона β .

Совместим эти два рисунка (см. рис. 4). Пусть конус с вершиной в точке S будет иметь наклон образующих к Π_1 под углом $\alpha = 45^\circ$, а конус с вершиной в точке T — образующие с углом наклона $\beta = 60^\circ$ к Π_2 . При этом для упрощения построений зададим сферу с центром O на оси x . Две окружности соприкосновения m и n , находящиеся на одной сфере, пересекаются в двух точках. Возьмем одну из них — точку A .

Три точка A , T и S будут задавать плоскость, наклоненную к Π_1 под заданным углом α , а к плоскости Π_2 — под углом β . На рис. 4 эта плоскость задана двумя пересекающимися образующими конусов SA и TA .

Очевидно, что таких плоскостей будет четыре: две из них, которые являются касательными к данной сфере и проходящих через две построенные точки. А еще две при нахождении подобных точек с конусами, вершины которых расположены на тех же осях, но с противоположных сторон сферы.

Для тех, кто привык плоскость задавать следами, такой вариант показан на рис. 5. Для этого была взята одна из образующих — TA , найден ее фронтальный след F и, поскольку точки A и S находятся на плоскостях проекций, SF представляет собой фронтальный след искомой плоскости f^Σ , который дает точку схода Σ_0 . Горизонтальный след h^Σ провести не составляет труда: $\Sigma_0 T_1$.

Касательная плоскость к сфере, в найденной ранее точке A , может быть задана горизонталью и фронталью, как показано на рис. 6.

На рис. 7 показана прямая OA , расположенная перпендикулярно построенной плоскости Σ (она на чертеже не показана) и имеющая с плоскостями проекций Π_1 и Π_2 углы:

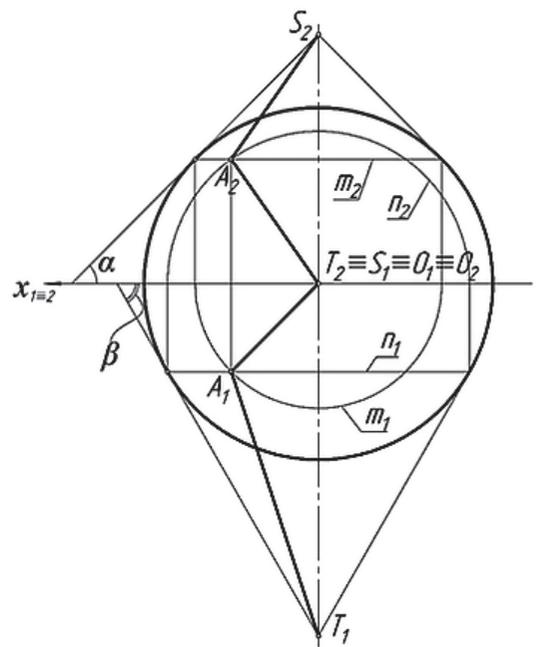


Рис. 4

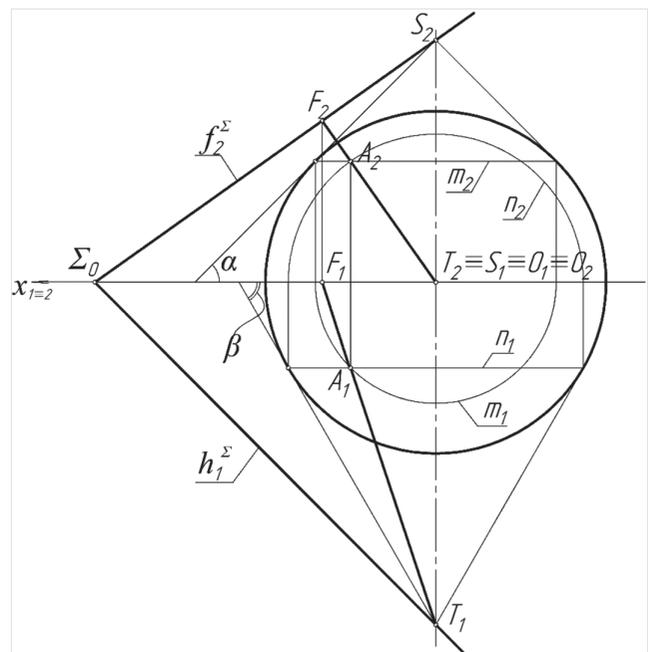


Рис. 5

$$\alpha' = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ; \tag{6}$$

$$\beta' = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ, \tag{7}$$

что следует из уравнений (1) и (2).

Перейдем к другой задаче. Пусть надо построить некоторую плоскость, расположенную под углом 45° к данной плоскости общего положения Σ (см. рис. 8).

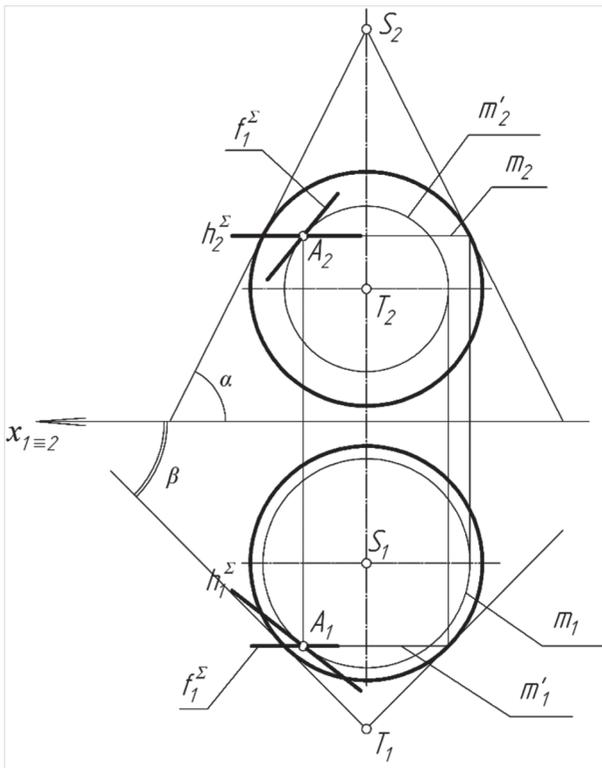


Рис. 6

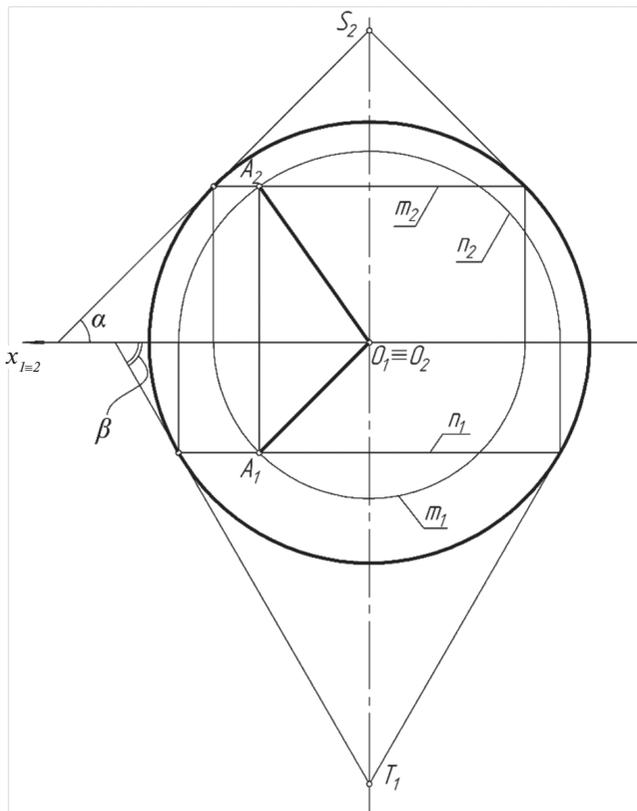


Рис. 7

Для решения применим способ введения новой плоскости проекций. Поскольку мы вводили ранее конусы, вращения, оси которых перпендикулярны плоскостям проекций, а мы снова будем применять конусы вращения, то пусть эта плоскость Π_4 будет перпендикулярна и Π_1 , и плоскости Σ . Для этого новую ось $x_{1=4}$ проводим перпендикулярно горизонтальному следу h_1^Σ .

Строим сферу с центром в точке $O(O_4)$, и к ней пристраиваем соприкасающийся со сферой по окружности n конус вращения с вершиной S и с осью, перпендикулярной плоскости Σ : $SO \perp f_4^\Sigma$.

Любая касательная к конусу плоскость будет искомой.

Берем на окружности некоторую (любую на окружности касания n) точку A , проводим образующую SA и параллель m (окружность, плоскость которой, параллельна Π_1), к которой проводим касательную t . Эта касательная t и образующая SA задают одну из множества касательных к сфере искомых плоскостей, проходящих под углом 45° к плоскости Σ .

Построить фронтальную проекцию прямых t и SA не является задачей данной статьи — это уже работа для студентов.

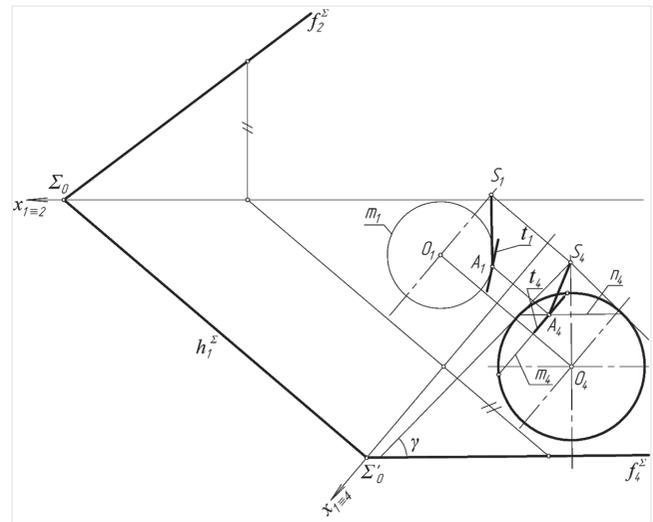


Рис. 8. Плоскость, проведенная под углом 45° к плоскости общего положения

Следующая задача. Путь нам надо провести прямую линию под углом 45° к плоскости общего положения. На основе предыдущего рисунка (рис. 8), учитывая выражение (6), достаточно соединить центр сферы с любой точкой окружности касания n , чтобы получить искомый результат (см. рис. 9).

На рис. 9 искомая прямая линия задана отрезком OA . Результат сопоставим с рис. 7.

А теперь решим задачу формирования линейчатой поверхности, у которой образующая находится под углом γ к заданной поверхности Λ , пересекающей линию k , расположенную на Λ и линию b , находящуюся в пространстве.

Здесь

$$\gamma = 90^\circ - \beta, \tag{8}$$

где β — угол наклона образующих построенного конуса вращения к плоскости Σ .

Решение показано на рис. 10, но без построения сферы с центром O на оси n .

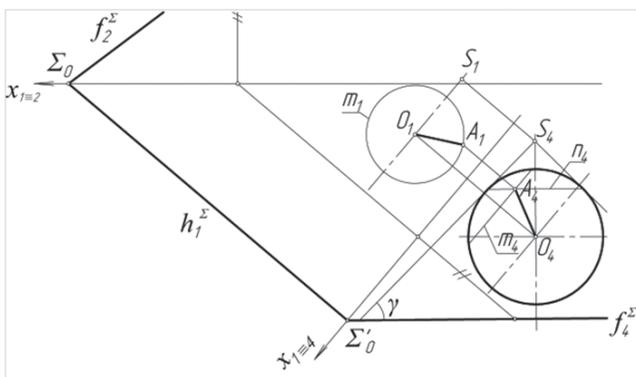


Рис. 9. Прямая под заданным углом к плоскости общего положения

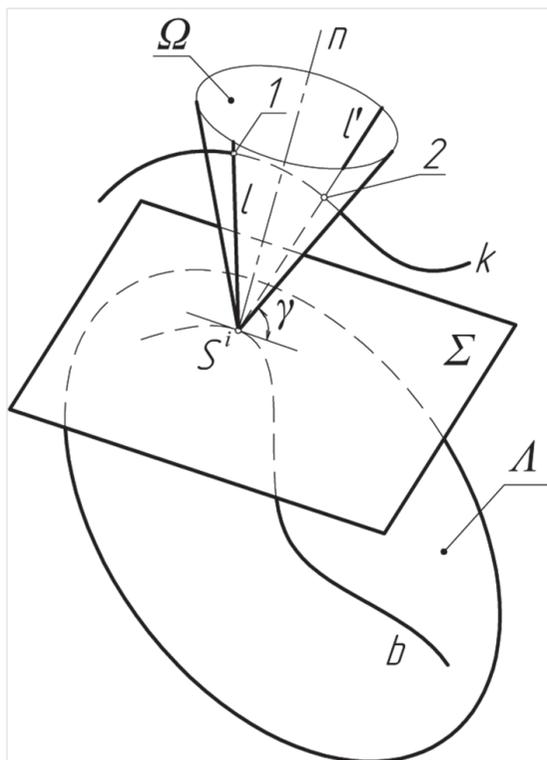


Рис. 10. Образующая, проходящая под заданным углом к поверхности Ω и пересекающая две кривые линии k и b

Дано: три геометрические фигуры: поверхность Λ , линия $b \subset \Lambda$, кривая k ; а также три условия: $l^i \cap k$; $l^i \cap b$; $l^i \wedge \Lambda = \gamma$.

Алгоритм решения.

1. В каждой точке S^i линии b строим плоскость Σ , касательную к поверхности Λ .
2. Строим нормаль n к поверхности Λ и конус вращения с вершиной в точке S и с углом наклона γ к плоскости Σ .
3. Находим точки пересечения 1 и 2 построенного конуса вращения с кривой k . Эти точки вместе с вершиной S дают в данном случае прямые $S1$ и $S2$, которые являются одними из образующих l и l' .
4. Два множества построенных образующих l и l' дадут две половины искомых линейчатых поверхностей. Другое задание линейчатых поверхностей представляет собой огибающую множества конусов вращения.

Дано: поверхность Λ , линия $b \subset \Lambda$; а также условия: $l^i \cap b$; $l^i \wedge \Lambda = \gamma$.

Алгоритм решения.

1. В каждой точке S^i линии b строим плоскость Σ , касательную к поверхности Λ .
2. Строим нормаль n к поверхности Λ и конус вращения с вершиной в точке S^i и с углом наклона γ образующих к плоскости Σ .
3. В результате получаем однопараметрическое множество (∞^1) конусов вращения, огибающая которых будет искомой поверхностью (двумя поверхностями) одинакового ската к данной поверхности Λ . Математически огибающая поверхность находится как множество линий пересечения конусов вращения, вершины которых расположены на столь небольшом расстоянии (стремящемся к нулю), что эти конусы практически пересекаются по образующим. Этот момент является третьим заданием геометрической фигуры, а также третьим геометрическим условием в создании поверхности [25].

Следующее построение, показанное на рис. 11, заключается в том, что требуется построить линейчатую поверхность, каждая образующая которой находится под углами γ к двум заданным поверхностям Λ и Δ .

Дано: три геометрические фигуры — поверхности Λ и Δ , линия $b \subset \Lambda$, а также три условия: $l^i \cap b$; $l^i \wedge \Lambda = \gamma$; $l^i \wedge \Delta = \gamma$.

Требуется построить линейчатую поверхность с соблюдением этих условий.

Алгоритм решения следующий (см. рис. 11).

1. В каждой точке S^i линии b строим плоскость Σ , касательную к поверхности Λ .
2. Строим нормаль n к поверхности Λ и конус вращения Ω с вершиной в точке S и с углом наклона γ к плоскости Σ .

3. Строим линию пересечения (не показана) Ω и Δ .
4. Строим плоскость $\Gamma \parallel \Sigma \wedge \Gamma \perp l$ (касательная) $\Delta \Rightarrow 1$ ($S1 \equiv l$).
5. Перемещая S по линии b , получаем ∞^1 прямых — искомую линейчатую поверхность.

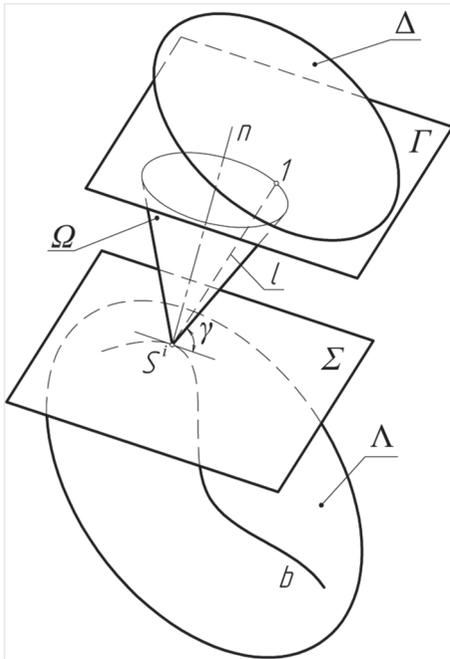


Рис. 11

Можно вместо плоскости $\Gamma \parallel \Sigma$ строить к каждой точке линии пересечения поверхностей Ω и Δ нормали n' и выбирать нормаль $n' \parallel n$.

Нормали n' и n параллельны, если образующие l' должны быть расположены под одним углом γ к обеим заданным поверхностям Λ и Δ (рис. 11 и 12, а). Если образующие должны быть под разными углами к заданным поверхностям: γ и γ' , то, $n \cap n'$, таким образом, как и при параллельных осях, n' и n составляют плоскость (рис. 12, б).

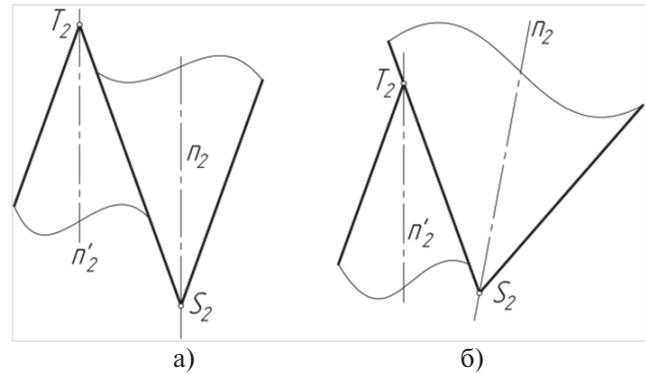


Рис. 12

Построенные конусы являются соприкасающимися по общей образующей.

Ранее в работе [25; 26] рассматривался случай, когда образующая должна быть касательной к любой данной поверхности. Здесь мы рассмотрели случаи прохождения образующей под определенным острым углом к данным поверхностям.

Все вышеизложенные выкладки могут быть использованы при разработке аналитических программ для компьютерной графики [24; 29–31].

Литература

1. Антонова И.В. Математическое описание вращения точки вокруг эллиптической оси в некоторых частных случаях [Текст] / И.В. Антонова, И.А. Беглов, Е.В. Соломонова // Геометрия и графика. 2019. — Т. 7. — № 3. — С. 36–50. — DOI: 10.12737/article_5dce66dd9fb966.59423840
2. Беглов И.А. Математическое описание метода вращения точки вокруг криволинейной оси второго порядка [Текст] / И.А. Беглов, В.В. Рустамян, И.В. Антонова // Геометрия и графика. — 2018. — Т. 6. — № 4. — С. 39–46. — DOI: 10.12737/article_5c21f6e832b4d2.25216268
3. Беглов И.А. Поверхности квазивращения и их применение в параметрической архитектуре [Текст]: дис. ... канд. техн. наук: 05.01.01 / И.А. Беглов. — Омск, 2022. — 200 с.
4. Волошинов Д.В. Визуально-графическое проектирование единой конструктивной модели для решения аналогов задачи Аполлония с учетом мнимых геометрических образов [Текст] / Д.В. Волошинов // Геометрия и

- графика. — 2018. — Т. 6. — № 2. — С. 23–46. — DOI: 10.12737/article_5b559c70becf44.21848537
5. Волошинов Д.В. Единый конструктивный алгоритм построения фокусов кривых второго порядка образов [Текст] / Д.В. Волошинов // Геометрия и графика. — 2018. — Т. 6. — № 2. — С. 47–54. — DOI: 10.12737/article_5b559dc3551f95.26045830
6. Волошинов Д.В. Об особенностях конструктивного решения задачи о сферах Данделена [Текст] / Д.В. Волошинов // Геометрия и графика. — 2018. — Т. 6. — № 2. — С. 55–62. — DOI: 10.12737/article_5b559f018f85a7.77112269
7. Вышнепольский В.И. Геометрические места точек, равноотстоящих от двух заданных геометрических фигур. Часть 1 [Текст] / В.И. Вышнепольский, Н.А. Сальков, Е.В. Заварихина // Геометрия и графика. — 2017. — Т. 5. — № 3. — С. 21–35. — DOI: 10/12737/article_59fa3beb72932.73328568
8. Гириш А.Г. Мнимости в геометрии [Текст] / А.Г. Гириш // Геометрия и графика. — 2014. — Т. 2. — № 2. — С. 3–8. DOI: 10.12737/5583

9. *Графский О.А.* Геометрия электростатических полей [Текст] / О.А. Графский, Ю.В. Пономарчук, А.А. Холодилов // Геометрия и графика. — 2018. — Т. 6. — № 1. — С. 10–19. — DOI: 10.12737/article_5ad085a6d75bb5.99078854
10. Грохот-питатель: авторское свидетельство 1025461 СССР; МКИ В 07 В 1/16 / Н.А. Сальков (СССР). — № 3333233/29-03; заявлен 25.06.81; опубликован 30.06.83. Бюллетень № 24. — 3 с.
11. Двухчервячный смеситель для пастообразных материалов: авторское свидетельство 1199625 СССР; МКИ В 29 В 7/42, В 29 С 47/40 / Н.А. Сальков (СССР). — № 3773765/23-05; заявлен 23.07.84; опубликован 23.12.85. Бюллетень № 47. — 3 с.
12. *Жихарев Л.А.* Геометрические методы оптимизации топологии конструктивных элементов на основе теории фракталов [Текст]: автореф. ... дис. канд. техн. наук: 2.5.1 / Л.А. Жихарев. — Нижний Новгород, 2023. — 22 с.
13. *Жихарев Л.А.* Применение кривой Коха для повышения прочности деталей самолета [Текст] / Л.А. Жихарев // Геометрия и графика. — 2022. — Т. 10. — № 4. — С. 13–25. — DOI: 10.12737/2308-4898-2022-10-4-13-25
14. *Камалов А.* Конструирование линейчатых поверхностей каркасно-параметрическим методом и их применение [Текст]: автореф. дис. ... канд. техн. наук: 2.5.1 / А. Камалов. — Самарканд, 1980. — 16 с.
15. *Кокарева Я.А.* Синтез уравнений линейчатых поверхностей с двумя криволинейными и одной прямолинейной направляющими [Текст] / Я.А. Кокарева // Геометрия и графика. — 2018. — Т. 6. — № 3. — С. 3–12. — DOI: 10.12737/article_5bc454948a7d90.80979486
16. *Кононов П.В.* Принципы построения геометрических моделей нанокластеров по тетраэдрической линии [Текст] / П.В. Кононов, И.Е. Кононова, О.Н. Мороз // Геометрия и графика. — 2022. — Т. 10. — № 3. — С. 12–22. — DOI: 10.12737/2308-4898-2022-10-3-12-22
17. *Короткий В.А.* Аппроксимация физического сплайна с большими прогибами [Текст] / В.А. Короткий // Геометрия и графика. — 2022. — Т. 10. — № 3. — С. 23–34. — DOI: 10.12737/2308-4898-2021-9-1-3-18
18. *Нитейский А.С.* Конструирование торсовой поверхности методом подвижного трехгранника Френе [Текст] / А.С. Нитейский // Омский научный вестник. — 2013. — № 2. — С. 151–153.
19. *Пилипака С.Ф.* Конструирование линейчатых поверхностей общего вида в системе сопроводительного трехгранника направляющей пространственной кривой [Текст] / С.Ф. Пилипака, Н.Н. Муквич // Труды Таврической государственной агротехнической академии. — Мелитополь: Изд-во ТДАТУ, 2007. — № 4. — Прикладная геометрия и инж. графика. — Т. 35. — С. 10–18.
20. *Рачковская Г.С.* Геометрическое моделирование и графика кинематических линейчатых поверхностей на основе триады контактирующих аксоидов [Текст] / Г.С. Рачковская // Геометрия и графика. — 2016. — Т. 4. — № 3. — С. 46–52. — DOI: 10.12737/21533
21. *Сальков Н.А.* Введение в кинетическую геометрию [Текст] / Н.А. Сальков. — М.: ИНФРА-М, 2016. — 142 с.
22. *Сальков Н.А.* Геометрическая составляющая технических инноваций [Текст] / Н.А. Сальков // Геометрия и графика. — 2018. — Т. 6. — № 2. — С. 85–93. — DOI: 10.12737/article_5b55a5163fa053.07622109.
23. *Сальков Н.А.* Моделирование автомобильных дорог [Текст]: монография / Н.А. Сальков. — М.: ИНФРА-М, 2012. — 120 с.
24. *Сальков Н.А.* Начертательная геометрия — база для компьютерной графики [Текст] / Н.А. Сальков // Геометрия и графика. — 2016. — Т. 4. — № 2. — С. 37–47. — DOI: 10.12737/19832
25. *Сальков Н.А.* Общие принципы задания линейчатых поверхностей. Часть 1 [Текст] / Н.А. Сальков // Геометрия и графика. — 2018. — Т. 6. — № 4. — С. 20–31. — DOI: 10.12737/article_5c21f4a06dbb74.56415078
26. *Сальков Н.А.* Общие принципы задания линейчатых поверхностей. Часть 2 [Текст] / Н.А. Сальков // Геометрия и графика. — 2019. — Т. 7. — № 1. — С. 14–27. — DOI: 10.12737/article_5c9201eb1c5f06.47425839
27. *Сальков Н.А.* Эллипс: касательная и нормаль [Текст] / Н.А. Сальков // Геометрия и графика. — 2013. — Т. 1. — № 1. — С. 35–37. — DOI: 10.12737/470
28. *Сальков Н.А.* Циклида Дюпена и ее приложение [Текст] / Н.А. Сальков. — М.: ИНФРА-М, 2016. — 142 с.
29. *Сальков Н.А., Волошинов Д.В.* Парабола. Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ RU 2020614640. Заявка № 2020612401 от 04 марта 2020.
30. *Сальков Н.А., Волошинов Д.В.* Гипербола. Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ RU 2020616015. Заявка № 2020612357 от 04 марта 2020.
31. *Сальков Н.А., Волошинов Д.В.* Эллипс. Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ RU 2020616140. Заявка № 2020612388 от 04 марта 2020.
32. Способ профилирования автомобильных дорог: авторское свидетельство 1714046 СССР. МКИ4 Е02 F 1/00 / Сальков Н.А. (СССР) — № 1714046 А1; заявлено 27.04.89, опубликовано 23.02.92, Бюллетень № 7, 1992. — 6 с.
33. Станок Сальковых для обработки многогранных поверхностей: авторское свидетельство 1505669 СССР, МКИ4 В 23 В 5/44 / Сальков Н.А., Сальков А.В., Салькова В.А. (СССР). — № 4293668/31-08; заявлено 01.06.87; опубликовано 07.09.89, Бюллетень № 33. — 4 с.
34. *Страшнов С.В.* Велародальные оболочки и оболочки велароидального типа [Текст] / С.В. Страшнов // Геометрия и графика. — 2022. — Т. 10. — № 2. — С. 11–19. — DOI: 10.12737/2308-4898-2022-10-2-11-19
35. *Швиденко Ю.З.* Сопряжения линейчатыми поверхностями и их применение для конструирования оболочек [Текст]: автореф. дис. ... канд. техн. наук / Ю.З. Швиденко. — Киев, 1966. — 14 с.
36. *Щеглов Г.А.* О геометрической интерпретации кватернионов конусами [Текст] / Г.А. Щеглов // Геометрия и графика. — 2022. — Т. 10. — № 3. — С. 23–34. — DOI: 10.12737/2308-4898-2022-10-3-23-34

37. Sal'kov N.A., Ivanov G.S., Slavin R.B. Areas of existence of ruled surfaces. IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series 1260 (2019) 072018. DOI:10.1088/1742-6596/1260/7/072018
38. Sal'kov N.A. Visualization of the Ruled surfaces of General Type / N.A. Salkov // IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Ser. 1441 (2020) 012078. DOI: 10.1088/1742-6596/1441/1/012078
39. Sal'kov N.A. Application of the Dupin cyclide in temple architecture / N.A. Salkov // IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series 1546 (2020) 012042. DOI: 10.1088/1742-6596/1546/1/012042
40. Sal'kov N.A. Setting of the Dupin cyclide by three straight lines and sphere / N.A. Salkov // IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Ser. 1791 (2021) 012060. DOI: 10.1088/1742-6596/1791/1/012060

References

1. Antonova I.V., Beglov I.A., Solomonova E.V. Matematicheskoe opisanie vrashheniya tochki vokrug e'llipticheskoy osi v nekotoryh chastnyh sluchayah [Mathematical description of the rotation of a point around an elliptical axis in some particular cases]. *Geometriya i grafika* [Geometry and Graphics]. 2019, V. 7, I. 3, pp. 36–50. DOI: 10.12737/article_5dce66dd9fb966.59423840. (in Russian)
2. Beglov I.A. Rustamyan V.V. Antonova I.V. Matematicheskoe opisanie metoda vrashcheniya tochki vokrug krivolineynoy osi vtorogo poryadka [A mathematical description of the method of rotation of a point around a curvilinear axis of the second order]. *Geometriya i grafika* [Geometry and Graphics]. 2018, V. 6, I. 4, pp. 39–46. DOI: 10.12737/article_5c21f6e832b4d2.25216268. (in Russian)
3. Beglov I.A. *Poverhnosti kvazivrashheniya i ih primeneniye v parametricheskoy arhitekture. Kand. Diss.* [Quasi-rotation surfaces and their application in parametric architecture. Cand. Diss.]: dis. ... kand. tehn. nauk: 05.01.01. Omsk, 2022. 200 p. (in Russian)
4. Voloshinov D.V. Vizual'no-graficheskoe proektirovaniye edinoj konstruktivnoy modeli dlya resheniya analogov zadachi Apolloniya s uchytom mnimyyh geometricheskikh obrazov [Visual graphic design of a unified constructive model for solving analogs of the Apollonian problem taking into account imaginary geometric images]. *Geometriya i grafika* [Geometry and Graphics]. 2018, V. 6, I. 2, pp. 23–46. DOI 10.12737/issn.2308-4898. (in Russian)
5. Voloshinov D.V. Edinyj konstruktivnyj algoritm postroeniya fokusov krivyh vtorogo poryadka [Unified constructive algorithm for constructing foci of second-order curves]. *Geometriya i grafika* [Geometry and Graphics]. 2018, V. 6, I. 2, pp. 47–54. DOI: 10.12737/article_5b559dc3551f95.26045830. (in Russian)
6. Voloshinov D.V. Ob osobennostyah konstruktivnogo resheniya zadachi o sferah Dandeleny [About the features of constructive solutions to the problem of spheres of Dandelin]. *Geometriya i grafika* [Geometry and Graphics]. 2018, V. 6, I. 2, pp. 55–62. DOI: 10.12737/article_5b559f018f85a7.77112269. (in Russian)
7. Vyshnepol'skij V.I., Sal'kov N.A., Zavarihina E.V. Geometricheskie mesta tochek, ravnootstoyashchih ot dvykh zadannykh geometricheskikh figur. Chast' 1 [Loci of Points Equally Spaced From Two Given Geometrical Figures. Part 1]. *Geometriya i grafika* [Geometry and graphics]. 2017, V. 5, I. 3, pp. 21–35. DOI: 10/12737/article_59fa3beb72932.73328568. (in Russian)
8. Girsh A.G. Mnimosti v geometrii [Imaginarities in Geometry]. *Geometriya i grafika* [Geometry and Graphics]. 2014, V. 2, I. 2, pp. 3–8. DOI: 10.12737/5583. (in Russian)
9. Grafskij O.A., Ponomarchuk YU.V., Holodilov A.A. Geometriya elektrostatičeskikh polej [Electrostatic field geometry]. *Geometriya i grafika* [Geometry and graphics]. 2018, V. 6, I. 1, pp. 10–19. DOI: 10.12737/article_5ad085a6d75bb5.99078854. (in Russian)
10. Grohot-pitatel' [Grokhhot-feeder]: avtorskoe svidetel'stvo 1025461 SSSR, MKI3 V 07 V 1/16 / N.A. Sal'kov (SSSR). № 3333233/29-03; zayavleno 25.06.81; opublikovano 30.06.83, Byulleten' I. 24, 3 p. (in Russian)
11. Dvuhchervyachnyj smesitel' dlya pastoobraznykh materialov [Two-worm mixer for pasty materials]: avtorskoe svidetel'stvo 1199625 SSSR, MKI4 V 29 V 7/42 / Sal'kov N.A. (SSSR). № 3773765/23-05; zayavleno 23.07.84; opublikovano 23.12.85, Byulleten' I. 47, 3 p. (in Russian)
12. Zhiharev L.A. *Geometricheskie metody optimizatsii topologii konstruktivnykh elementov na osnove teorii fraktalov. Kand. Diss.* [Geometric methods for optimizing the topology of structural elements based on fractal theory Cand. Diss.]: avtoref. dis. ... kand. tehn. nauk: 2.5.1. Nizhnij Novgorod, 2023. 22 p. (in Russian).
13. Zhiharev L.A. Primeneniye krivoj Koha dlya pov'sheniya prochnosti detalej samolyota [The use of the Koch curve to increase the strength of aircraft parts]. *Geometriya i grafika* [Geometry and graphics]. 2022, V. 10, I. 4, pp. 13–25. DOI: 10.12737/2308-4898-2022-10-4-13-25. (in Russian)
14. Kamalov A. *Konstruirovaniye linejchatykh poverhnostey karkasno-parametricheskimi metodami i ih primeneniye. Kand. Diss.* [The design of the ruled surfaces of frame-parametric method and their application. Cand. Diss.]: avtoref. dis. ... kand. tehn. nauk. Samarkand, 1980. 16 p. (in Russian)
15. Kokareva Ya.A. Sintez uravnenij linejchatykh poverhnostej s dvumya krivolinejnyimi i odnoy pryamolinejnoy napravlyayushchimi [Synthesis of the equations of the ruled surfaces with two curvilinear and one rectilinear guide]. *Geometriya i grafika* [Geometry and Graphics]. 2018, V. 6, I. 3, pp. 3–12. DOI: 10.12737/article_5bc454948a7d90.80979486. (in Russian)
16. Kononov P.V., Kononova I.E., Moroz O.N. Printsipy postroeniya geometricheskikh modelej nanoklasterov po tetraedricheskoy linii [Principle the constructed geometric pattern of nanoclusters along tetrahedral Lines]. *Geometriya i grafika* [Geometry and graphics]. 2022, V. 10, I. 3, pp. 12–22. DOI: 10.12737/2308-4898-2022-10-3-12-22. (in Russian)

17. Korotkij V.A. Approksimatsiya fizicheskogo splajna s bol'shimi progibami [Approximation of a physical spline with large deflections]. *Geometriya i grafika* [Geometry and graphics]. 2022, V. 10, I. 3, pp. 23–34. DOI: 10.12737/2308-4898-2021-9-1-3-18. (in Russian)
18. Nitejskij A.S. Konstruivovanie torsovoj poverhnosti metodom podvizhnogo tryohgrannika Frene [Construction of a torso surface by the method of a movable triaxial Frenet]. *Omskij nauchnyj vestnik* [Omsk Scientific Herald]. 2013, I. 2, pp. 151–153. (in Russian)
19. Pilipaka S.F., Mukvich N.N. Konstruivovanie linejchatyh poverhnostej obshchego vida v sisteme soprovoditel'nogo tryohgrannika napravlyayushchej prostranstvennoj krivoj [Construction of ruled surfaces of general form in the system of the accompanying trihedron of the directional spatial curve]. *Trudy Tavricheskoy gosudarstvennoj agrotehnicheskoy akademii* [Proceedings of the Taurian State Agrotechnical Academy]. Melitopol: TDATU Publ., 2007, I. 4. (in Russian)
20. Rachkovskaya G.S. Geometricheskoe modelirovanie i grafika kinematicheskikh linejchatyh poverhnostej na osnove triady kontaktiruyushchih aksoidov [Geometric modeling and graph of kinematic ruled surfaces based on the triad of contacting axoids]. *Geometriya i grafika* [Geometry and graphics]. 2016, V. 4, I. 3, pp. 46–52. DOI: 10.12737/21533 (in Russian)
21. Sal'kov N.A. *Vvedenie v kineticheskuyu geometriyu* [Introduction to kinetic geometry]. Moscow, INFRA-M Publ., 2016. 142 p. (in Russian)
22. Sal'kov N.A. Geometricheskaja sostavljajushhaja tehnikeskikh innovatsij [Geometric component of technical innovations]. *Geometriya i grafika* [Geometry and graphics]. 2018, V. 18, I. 2, pp. 85–94. DOI: 10.12737/article_5b55a-5163fa053.0722109. (in Russian)
23. Salkov N.A. *Modelirovanie avtomobil'nyh dorog: monografija* [Modeling of highways]. Moscow, INFRA-M Publ., 120 p. (in Russian)
24. Sal'kov N.A. Nachertatel'naya geometriya — baza dlya komp'yuternoj grafiki [Descriptive geometry — a base for computer graphics]. *Geometriya i grafika* [Geometry and graphics]. 2016, V. 4, I. 2, pp. 37–47. DOI: 10.12737/19832. (in Russian)
25. Sal'kov N.A. Obshhie principy zadaniya linejchatyh poverhnostej. Chast' 1 [General principles of setting ruled surfaces. Part 1]. *Geometriya i grafika* [Geometry and Graphics]. 2018, V. 6, I. 4, pp. 20–31. DOI: 10.12737/article_5c21f4a06dbb74.56415078. (in Russian)
26. Sal'kov N.A. Obshhie printsipy zadaniya linejchatyh poverhnostej. Chast' 2 [General principles of setting ruled surfaces. Part 2]. *Geometriya i grafika* [Geometry and Graphics]. 2019, V. 7, I. 1, pp. 14–27. DOI: 10.12737/article_5c9201eb1c5f06.47425839. (in Russian)
27. Sal'kov N. A. Ellips: kasatel'naya i normal' [Ellipse: tangent and normal]. *Geometriya i grafika* [Geometry and Graphics]. 2013, V. 1, I. 1, pp. 35–37. DOI: 10.12737/470. (in Russian).
28. Sal'kov N.A. *Tsiklida Dyupena i eyo prilozhenie* [Dupin's Cyclide and its appendix]. Moscow, INFRA-M Publ., 142 p. (in Russian)
29. Sal'kov N.A., Voloshinov D.V. Parabola. Svidetel'stvo o registratsii programmy dlya E'VM RU 2020614640. Zayavka № 2020612401 ot 04 marta 2020. (in Russian)
30. Sal'kov N.A., Voloshinov D.V. Giperbola. Svidetel'stvo o registratsii programmy dlya E'VM RU 2020616015. Zayavka № 2020612357 ot 04 marta 2020. (in Russian)
31. Sal'kov N.A., Voloshinov D.V. E'llips. Svidetel'stvo o registratsii programmy dlya E'VM RU 2020616140. Zayavka № 2020612388 ot 04 marta 2020. (in Russian)
32. Sposob profilirovaniya avtomobil'nyh dorog: avtorskoe svidetel'stvo 1714046 SSSR. MK14 E 02 F 1/00 / Sal'kov N.A. (SSSR) № 1714046 A1; zayavleno 27.04.89, opublikovano 23.02.92, Byulleten' № 7, 1992. 6 p. (in Russian)
33. Stanok Sal'kovy'h dlya obrabotki mnogogranny'h poverhnostej: avtorskoe svidetel'stvo 1505669 SSSR, MK14 V 23 V 5/44. Sal'kov N.A., Sal'kov A.V., Sal'kova V.A. (SSSR). № 4293668/31-08; zayavleno 01.06.87; opublikovano 07.09.89, Byulleten' № 33. 4 p.
34. Strashnov S.V. Velarodal'ny'e obolochki i obolochki velaroidal'nogo tipa [Velaroidal obolochs and obolochs velaroidal type]. *Geometriya i grafika* [Geometry and graphics]. 2022, V. 10, I. 2, pp. 11–19. DOI: 10.12737/2308-4898-2022-10-2-11-19. (in Russian)
35. Shvidenko Yu.Z. *Sopryazheniya linejchatymi povrekhnostyami i ih primenenie dlya konstruivovaniya obolochek*. Kand. Diss. [Mate bar poverhnosti and their use of for constructing shells.Cand. Diss.]: avtoref. dis. ... kand. tehn. nauk. Kiev, 1966. 14 p. (in Russian)
36. Shheglov G.A. O geometricheskoy interpretatsii kvaternionov konusami [Geometric interpretations of quaternion cones]. *Geometriya i grafika* [Geometry and graphics]. 2022, V. 10, I. 3, pp. 23–34. DOI: 10.12737/2308-4898-2022-10-3-23-34. (in Russian)
37. Sal'kov N.A., Ivanov G.S., Slavin R.B. Areas of existence of ruled surfaces. IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series 1260 (2019) 072018. DOI: 10.1088/1742-6596/1260/7/072018
38. Sal'kov N.A. Visualization of the Ruled surfaces of General Type IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Ser. 1441 (2020) 012078. DOI:10.1088/1742-6596/1441/1/012078
39. Sal'kov N.A. Application of the Dupin cyclide in temple architecture IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series 1546 (2020) 012042. DOI: 10.1088/1742-6596/1546/1/012042
40. Sal'kov N.A. Setting of the Dupin cyclide by three straight lines and sphere / N.A. Salkov // IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Ser. 1791 (2021) 012060. DOI: 10.1088/1742-6596/1791/1/012060