

**Савиных Алена Сергеевна**

**Анализ прогиба арочной раскосой фермы, нагруженной по верхнему поясу**

**Savinykh Alena Sergeevna**

**Analysis of deflection of the arch truss loaded at the upper belt**

Приведён аналитический расчет деформации арочной фермы, имеющей две опоры, одна из которых неподвижна, другая – подвижна. Ферма равномерно нагружена по верхнему поясу. Для определения усилий в стержнях методом вырезания узлов использовалась система компьютерной математики Maple. С помощью метода индукции было получено решение в символьной форме для произвольных числа панелей, геометрических характеристик фермы, жесткости поясов и нагрузки. Теоретической основой для расчета прогиба является формула Максвелла-Мора.

The analytical calculation of the deformation of the arch truss that has two supports, one of which is stationary, the other is moveable is presented. Truss uploaded in the nodes of the upper belt. To determine the forces in the rods used a system of computer mathematics Maple and the method of cut nodes. By induction we obtain analytical solutions in symbolic form for the deflection regardless of the size of the truss, load, number of panels and the stiffness of the belts. The formula of Maxwell-Mora is the theoretical basis for the analytical calculation of the deflection.

**Ключевые слова:** ферма; прогиб; деформация; индукция; Maple; формула

**Key words:** truss; deflection; deformation, induction; Maple; formula.

Рассмотрим плоскую арочную раскосую ферму (рис.1) с произвольным числом панелей  $n$  в средней ее части. Число панелей в боковых частях примем  $m=2$ . Расчет усилий в стержнях фермы может быть произведен как методом вырезания узлов, так и методом сечений. Метод сечений не имеет эффекта накопления погрешности округления, однако, программная реализация метода сечений затруднительна, в то время как для расчета методом вырезания узлов известна программа [1] на языке символьной математики Maple. Прогиб фермы с определённым заданным числом стержней будем определять с помощью формулы Максвелла-Мора. Более трудной задачей является нахождение зависимости прогиба от числа панелей  $n$ , т.е. решение задачи о прогибе фермы с не заданным наперед числом панелей.

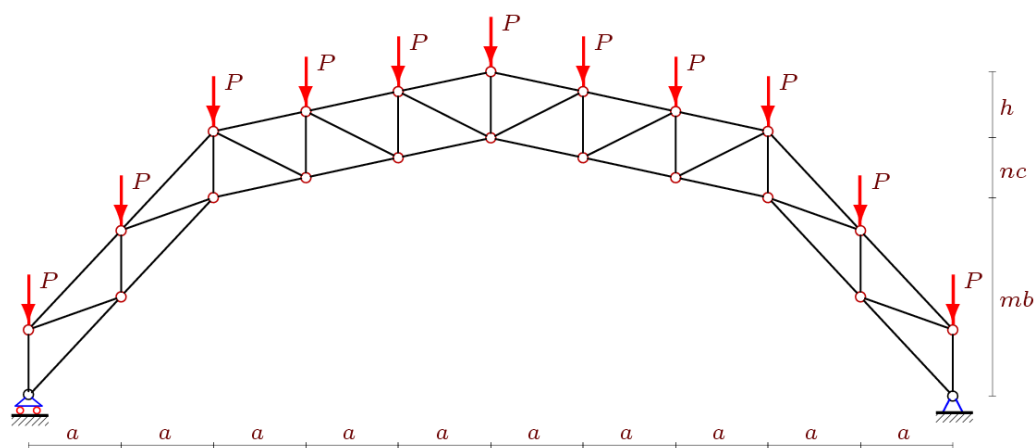


Рис. 1 Ферма при  $n=3, m=2$

В работах [2-8] для вывода формулы зависимости прогиба от геометрических параметров фермы, нагрузки и числа её панелей использован метод индукции и компьютерная программа [1].

Пропорции фермы помимо размеров панелей задают два числа:  $n$  — число панелей в половине средней части фермы и  $m$  — число панелей в боковых опорных частях. Число стержней равно  $K=8(m+n)+4$ , включая три стержня, моделирующие опоры. В программу [1] необходимо ввести данные о координатах шарниров и порядке соединения стержней и шарниров. Последнее аналогично заданию графа в дискретной математике и реализуется в виде специальных векторов с координатами – номерами шарниров по концам стержней.

В системе Maple задание координат выполняется в циклах. Начало координат располагается в левом опорном шарнире (рис. 2):

```
> r:=2*m+2*n+1;
> for i to r do x[i]:=a*(i-1); od;
> for i to m do
  y[i]:=(i-1)*b:
  y[i+m+2*n+1]:=(m-i)*b:
od:
> for i to n do
  y[i+m]:=(i-1)*c+m*b;
  y[i+m+n+1]:=m*b+(n-i)*c;
od:
> y[m+n+1]:=m*b+n*c:
> for i to r do
  x[i+r]:=(i-1)*a:
  y[i+r]:=y[i]+h:
```

od:

Расчет прогиба, измеряемого по вертикальному смещению центрального узла нижнего пояса (узел с номером  $n+m+1$ , рис. 2), производится по формуле Максвелла-Мора:

$$\Delta = \sum_{i=1}^{K-3} \frac{S_i N_i l_i}{EF_i},$$

где введены обозначения:  $S_i$  – усилия в стержнях фермы от действия внешней нагрузки,  $N_i$  — усилия в стержнях от действия единичной горизонтальной силы, приложенной к подвижной опоре,  $l_i$  — длины стержней,  $K = 4(2m + 2n + 1)$  — число стержней, включая три стержня, соответствующие подвижной и неподвижной опорам,  $EF$  — их жесткость. Жесткость принята для всех стержней одинаковой. Три опорные стержня приняты недеформируемыми и в сумму не входят.

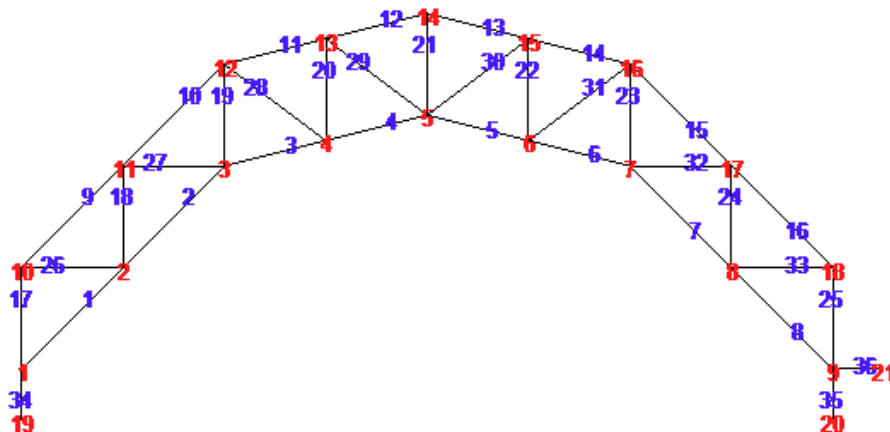


Рис. 2. Нумерация стержней и узлов в системе Maple,  $n=2$ ,  $m=2$

Решения будем искать в символьной форме при  $m=2$ , используя метод индукции для обобщения отдельных решений на произвольное число панелей  $n$ . Аналогичные расчеты смещения подвижной опоры статически определимых ферм содержатся в [9-11]. Более сложные задачи о прогибе пространственных ферм методом индукции решены в [12–15].

Результатом индукции по десяти фермам является следующая формула:

$$EF\Delta = P \frac{Ah^3 + Bg^3 + Cd^3 - Dh^2b + Rh^2c + Q(2hb^2 - 4hbc + v^3) + Hhc^2 + Ju^3}{h^2}, \quad (1)$$

где  $A, B, C, D, E, Q, H, J$  — коэффициенты, зависящие от числа панелей  $n$ , равные:

$$\begin{aligned}
 A &= 4 + 3n + n^2 / 2; \\
 B &= n(5n^3 + 40n^2 + 121n + 92) / 12; \\
 H &= n^3 + 6n^2 + 16n + 12; C = 7 + 6n; \\
 D &= 3 + 4n; R = 1 + 3n; Q = 2(n + 1); J = n^2 / 2.
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

Геометрические параметры  $d, g, u, v$  зависят от задаваемых размеров фермы  $a, b, c, h$  и определяются через них следующим образом:

$$d = \sqrt{a^2 + b^2}; g = \sqrt{a^2 + c^2}; u = \sqrt{a^2 + (h - c)^2}; v = \sqrt{a^2 + (h - b)^2}.$$

На примере вывода коэффициента  $C$ , приведем фрагмент программы, иллюстрирующий процедуру определения рекуррентного уравнения для коэффициентов искомой формулы и решения этого уравнения

```

> n:='n': with(genfunc):
> Cn:=13, 19, 50/2, 31, 74/2, 43:
> NN:=nops([Cn])/2:
> Z:=rgf_findrecur(NN, [Cn], Cn_, n);
      Z:=Cn_(n) =2 Cn_(n - 1) - Cn_(n - 2)
> C_n:=simplify(rsolve({Z, seq(Cn_(i)=Cn[i], i=1..NN)}, Cn_));
      C_n:=6 n +7

```

Таким образом, было выведено общее решение, справедливое для произвольного числа панелей  $n$ . На рисунке 2 представлены графики зависимости (1) безразмерного прогиба  $\Delta' = \Delta EF / (P_s L)$ , где обозначена суммарная нагрузка на ферму  $P_s = P(2n + 2m + 1)$  от количества панелей при  $L = 2a(n + m) = 50$ ,  $c = 1$  м.

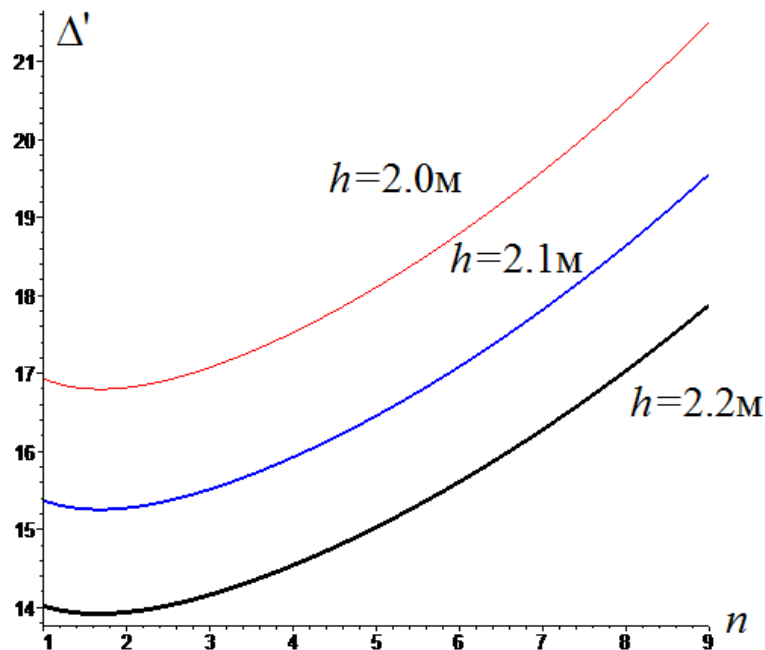


Рис.2 Зависимость прогиба от числа панелей  $n$

Характерной особенностью решения являются точки минимума, приходящиеся на достаточно малые значения числа панелей. На практике фермы с такими параметрами используются редко. Заметна также существенная чувствительность прогиба к высоте  $h$ . Небольшое увеличение высоты заметно увеличивают жесткость конструкции.

Для расчета устойчивости и прочности фермы на практике необходимо знать величины усилий в наиболее сжатых и растянутых стержнях фермы. В данной конструкции это стержни в середине верхнего и нижнего пояса соответственно. Методом индукции получим следующие выражения

$$S_{n+2} = (n^2 + 4n + 3)Pg / (2h), \quad S_{3n+6} = - (n + 2)^2 Pg / (2h).$$

Отметим, что усилия в этих стержнях растут с квадратом числа панелей.

Все полученные зависимости могут найти применение при проектировании новых и оценки эксплуатационных характеристик известных сооружений рассмотренного типа. Сравнивая найденное решение с аналогичными задачами [2-7], заметим, что оно содержит больше геометрических параметров — четыре ( $a, b, c, h$ ), помимо  $n$  и  $m$ , в то время как в большинстве задач их не более трех. Это приводит к усложнению итоговой формулы, в которой приходится методом индукции определять уже восемь коэффициентов (2) в зависимости от числа панелей.

Следующим (достаточно трудоемким) шагом будет распространение аналитических расчетов на произвольное число панелей  $m$  в боковых частях фермы.

## Литература

1. Кирсанов М.Н. Maple и Maple. Решения задач механики. – СПб.: Лань, 2012. – 512 с.
2. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет регулярной балочной фермы с произвольным числом панелей со сложной решеткой // Строительная механика и расчет сооружений. 2016. № 3 (266). С. 16–19.
3. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет многорешетчатой фермы // Строительная механика и расчет сооружений. 2014. № 6 (257). С. 2–6.
4. Кирсанов М.Н. Анализ прогиба решетчатой балочной фермы распорного типа // Инженерно–строительный журнал. 2015. № 5 (57). С. 58–65.
5. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета плоской балочной фермы с произвольным числом панелей // Строительная механика и конструкции. 2016. Т. 1. № 12. С. 19–24.
6. Кирсанов М.Н. Сравнительный анализ жесткости двух схем арочной фермы // Строительство уникальных зданий и сооружений. 2015. № 9 (36). С. 44–55.
7. Кирсанов М.Н. Скрытая особенность и асимптотические свойства одной плоской балочной фермы // Строительная механика и расчет сооружений. 2014. № 4 (255). С. 9–13.
8. Kirsanov M.N. Analytical calculation, marginal and comparative analysis of a flat girder // Scientific Herald of the Voronezh State University of Architecture and Civil Engineering. Construction and Architecture. 2016. № 1 (29). С. 84–105.
9. Кружков Е. П. Горизонтальное смещение опоры плоской арочной фермы с треугольной решеткой в зависимости от числа панелей // Вестник научных конференций. 2015. № 4-1(4). С. 90-91
10. Поляков В.К. Формула для горизонтального смещения опоры безраспорной арочной фермы под действием равномерной нагрузки по верхнему поясу // Актуальные вопросы в научной работе и образовательной деятельности. Ч. 10. Тамбов, 2015. С. 98-99.
11. Савиных А.С. Формула для расчета смещения подвижной опоры плоской статически определимой фермы//Научный альманах. 2016. N 9-2(23). С. 46-49.
12. Кирсанов М.Н. Анализ прогиба фермы прямоугольного пространственного покрытия // Инженерно–строительный журнал. 2015. № 1 (53). С. 32–38.
13. Кирсанов М.Н., Андреевская Т.М. Анализ влияния упругих деформаций мачты на позиционирование антенного и радиолокационного оборудования // Инженерно–строительный журнал. 2013. № 5 (40). С. 52–58.
14. Кирсанов М.Н. Статический расчет и анализ пространственной стержневой системы // Инженерно–строительный журнал. 2011. № 6. С. 28–34.
15. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет пространственной стержневой регулярной структуры с плоской гранью // Строительная механика и расчет сооружений. 2015. № 2 (259). С. 2–6.

## References

1. Kirsanov M.N. *Maple and Maplet. Reshenie problem mehanici* [Solving problems of mechanics], Saint-Peterburg Lan Publ., 2012, 512 p. (in Russian)
2. Kirsanov M.N. Analytical calculation of a regular beam truss with an arbitrary number of panels with a complex lattice // *Stroitel'naja mehanika i raschet sooruzhenij* [Construction mechanics and calculation of structures], 2016, no. 3, pp. 16-19. (in Russian)
3. Kirsanov M.N. Analytical calculation of multi-lattice truss // *Stroitel'naja mehanika i raschet sooruzhenij* [Construction mechanics and calculation of structures], 2014, no. 6, pp. 2-6. (in Russian)
4. Kirsanov M.N. Analysis of the deflection of a lattice girder truss of a spacer type // *Inzhenerno–stroitel'nyj zhurnal* [Magazine of Civil Engineering], 2015, no. 5, pp. 58-65, DOI: 10.586/MCE.57.5. (in Russian)
5. Kirsanov M.N. An analytical expression for the deflection of a truss girder with a complex lattice // *Stroitel'naja mehanika i raschet sooruzhenij* [Construction mechanics and calculation of structures], 2016, no. 12, pp. 19-24. (in Russian)
6. Kirsanov M.N. A comparative stiffness analysis of two schemes arched truss// *Stroitelstvo unikal'nyh zdaniy i sooruzhenij* [Construction of unique buildings and structures], 2015, no. 9, pp. 44-55.(in Russia)
7. Kirsanov M.N. The hidden feature and asymptotic properties of one flat beam truss // *Stroitel'naja mehanika i raschet sooruzhenij* [Construction mechanics and calculation of structures], 2014, no. 4, pp. 9-13.
8. Kirsanov M.N. Analytical calculation, marginal and comparative analysis of a flat girder // *Scientific Herald of the Voronezh State University of Architecture and Civil Engineering. Construction and Architecture*, 2016, no.1, pp. 84–105.
9. Kruzhkov E.P. The horizontal offset supports of flat arched truss with a triangular lattice depending on the number of panels and the redistribution of the areas of the rods // *Vestnik nauchnyh konferencyi* [Bulletin of scientific conferences], 2015, no. 4-1(4), pp. 90-91, DOI: 10.17117/na.2016.06.02.247. (in Russian)
10. Polyakov V.K. The formula for the horizontal displacement of the support of the unrestrained arched truss under the action of uniform load over the upper belt // *Aktualnye voprosy v nauchnoj rabote i obrazovatelnoj dejatel'nosti* [Actual questions in scientific work and educational activities], Tambov, 2015, vol. 10, pp. 98-99. (in Russian)
11. Savinykh A.S. The formula to calculate the displacement of the movable support of flat statically determinate truss // *Science Almanac*. 2016. N 9-2(23). pp. 46-49. DOI: 10.17117/na.2016.09.02.046 (in Russian)
12. Kirsanov M.N. Deflection analysis of rectangular spatial coverage truss // *Inzhenerno–stroitel'nyj zhurnal* [Magazine of Civil Engineering], 2015, no. 1, pp. 32-38, DOI: 10.5862/MCE.53.4 (in Russian)
13. Kirsanov M.N. Analysis of the effect of elastic deformation of the mast on the positioning of antenna and radar equipment// *Inzhenerno–stroitel'nyj zhurnal* [Magazine of Civil Engineering], 2013, no. 5, pp. 52-58, DOI: 10.5862/MCE.40.6. (in Russian)
14. Kirsanov M.N. Static calculation and analysis of spatial rod system// *Inzhenerno–stroitel'nyj zhurnal* [Magazine of Civil Engineering], 2011, no. 6, pp. 28-34. DOI: 10.5862/MCE.24.1 (in Russian)
15. Kirsanov M.N. Analytical calculation of a spatial bar-shaped regular structure with a flat face // *Stroitel'naja mehanika i raschet sooruzhenij* [Construction mechanics and calculation of structures], 2015, no. 2, pp. 2-6. (in Russian)

**Савиных Алена Сергеевна**

Студент  
Национальный исследовательский  
университет «МЭИ» г. Москва,  
ул.Красноказарменная, 14

alena-9801@mail.ru

**Savinykh Alena Sergeevna**

Student  
National research university "MPEI" Moscow,  
Krasnokazarmennaya st., 14

alena-9801@mail.ru