

Иные геометрии и лейбнизианская парадигма

Other geometries and the Leibnizian paradigm

Мацуга Г.А.

Независимый исследователь, Свободная гуманитарная академия (Воронеж)

e-mail: georgalexandrmatsua@gmail.com

Matsuga G.A.

Independent researcher, Free Humanitarian Academy (Voronezh)

e-mail: georgalexandrmatsua@gmail.com

Аннотация

В данной работе рассматривается вопрос о том, как следует оценивать новации Бернхарда Римана в области геометрии с точки зрения исходного лейбнизианства, т.е. как это было сформулировано в изложении самого Лейбница. Здесь же будет рассмотрен вопрос о том, то представляет собой лейбнизианская парадигма как явление особого рода. Как известно, сам Лейбниц отверг идею о возможности многомерных пространств. Это видно, например, из параграфа 351 его «Теодицеи». Однако в рамках лейбнизианской парадигмы содержатся принципы, которые в дальнейшем могли способствовать открытию неэвклидовых геометрий и развитию такой области знаний как геометрия многомерных пространств. Особое место здесь занимает принцип достаточного основания, который мог сыграть свою роль в поиске достаточных оснований для каждого положения геометрии, в том числе и для аксиом. Как известно, именно поиск оснований для пятого постулата геометрии Эвклида привёл Лобачевского к идее неэвклидовой геометрии.

Ключевые слова: Риман, Лейбниц, неэвклидова геометрия, искривление пространства, многомерное пространство, лейбнизианство, лейбнизианская парадигма.

Abstract

This paper examines the question of how we should evaluate Bernhard Riemann's innovations in the field of geometry from the point of view of the original Leibnizianism, that is, as formulated in the presentation of Leibniz himself. Here we will also consider the question of whether the Leibnizian paradigm is a special kind of phenomenon. As we know, Leibniz himself rejected the idea of the possibility of multidimensional spaces. This can be seen, for example, in paragraph 351 of his *Theodicy*. However, the Leibnizian paradigm contains principles that could later contribute to the discovery of non-Euclidean geometries and the development of such a field of knowledge as the geometry of multidimensional spaces. A special place here is occupied by the principle of sufficient reason, which could play a role in finding sufficient grounds for each position of geometry, including for axioms. As is known, it was the search for the foundations for the fifth postulate of Euclid's geometry that led Lobachevsky to the idea of non-Euclidean geometry.

Keywords: Riemann, Leibniz, non-Euclidean geometry, curvature of space, multidimensional space, Leibnizianism, Leibnizian paradigm.

Очевидно, что Лейбниц, живший в XVII – начале XVIII вв. был очень далёк от сформулированных только в XIX в. идей Лобачевского о неэвклидовой геометрии или идей Римана об искривлении пространства. И, тем не менее в рамках развивавшейся им философской концепции уже тогда были заложены основополагающие принципы, которые, как это представляется на первый взгляд, должны были бы способствовать принятию самими сторонниками этой философ-

ской концепции революционных идей Лобачевского и Римана в геометрии. Одно из этих положений – принцип достаточного основания. Сам Лейбниц формулирует этот принцип так: «ничего не делается без достаточного основания, т.е. не происходит ничего такого, для чего нельзя было бы при полном познании вещей указать основания, достаточного для определения, почему это происходит так, а не иначе» [3, с. 408]. Ясно, что философ, который в своих построениях опирается на этот принцип, должен стараться найти основание для каждого важного в рамках его философской работы положения – основание того, стоит ли это положение принять или отвергнуть. То же самое можно сказать и о любом учёном, принявшем этот принцип: он должен стараться найти основания для принятия тех или иных положений, значимых для дисциплины, которой он занимается. Поэтому очевидно, что если некий геометр принимает принцип достаточного основания, то он должен искать основания для принятия тех или иных положений геометрии, причём не только теорем, но даже и аксиом.

И это действительно так, сам Лейбниц призывал математиков к поиску оснований для принятия самих аксиом геометрии. Например, в работе «Замечания к общей части Декартовых "Начал"», к первой части, к пункту 1, он пишет: «Мы поясним нашу мысль лучше всего на примере геометров. Известно, что у них существуют аксиомы и постулаты, на истинности которых строится всё остальное. Мы допускаем их истинность иногда потому, что наш ум сразу же соглашается с ней, иногда потому, что она подтверждается бесконечными опытами, и всё же для развития науки было бы важнее, если бы они были доказаны. В своё время этим занимались по отношению к некоторым аксиомам Аполлоний и Прокл, а недавно – Роберваль. (Прокл же приводит аналогичные попытки самого Фалеса Милетского.)» [4, с. 172-173].

Развивая эту мысль в письме (вероятно, написанном в 1676 г. в Париже) к С. Фуше Лейбниц написал: «Я всегда приветствую тех, кто стремится исследовать любую, хотя бы и незначительную истину до конца: я знаю, как много значит досконально изучить предмет, сколь бы простым или мелким он ни казался. Именно этим путём можно добиться многого, так как совершить подлинные открытия возможно лишь при условии чёткого и глубокого понимания самых простых вещей. Вот почему я отнюдь не порицал намерений г-на де Роберваля, пожелавшего дать полное доказательство всех положений геометрии, сведя их к нескольким аксиомам. Конечно, вовсе не обязательно принуждать к такой скрупулёзности всех, однако для нас самих подобный метод был бы, мне кажется, полезен» [4, с. 270]. Об этом же Лейбниц пишет и в «Некоторых соображениях о развитии наук и искусстве открытия» (то есть, в работе, датированной не ранее конца 1690-х гг): «Больше того, мы видим, что Прокл и другие геометры пытаются представить доказательства некоторых аксиом, в которых никто не сомневается, а, например, Евклид счёл возможным предположить, что две прямые линии не могут иметь общего отрезка. Покойный г-н Роберваль тоже придерживался мнения, что следует доказывать аксиомы, насколько это возможно, и, как поговаривали, в самом деле собирался это сделать в задуманных им "Началах геометрии"» [4, с. 469].

Как мы видим, и в свои ранние годы, и в более позднее время Лейбниц продолжал развивать эту идею о необходимости поиска оснований каждой истины, даже если она кажется столь очевидной, как аксиомы эвклидовой геометрии. Но именно этот поиск оснований и привёл к тому, что в 1829-1830 гг. Н.И. Лобачевский впервые опубликовал работу, в которой излагалась идея неевклидовой геометрии («О Началах геометрии» в «Казанском вестнике»). Как известно, к идее неевклидовой геометрии Лобачевского привели размышления о так называемом «пятом постулате» Евклида. Это положение казалось не столь очевидным, как другие аксиомы эвклидовой геометрии, поэтому многие математики пытались его вывести из других аксиом геометрии, но все эти попытки терпели неудачу. Лобачевский же, в конечном итоге, предположил, что отрицание пятого постулата не противоречит другим аксиомам геометрии. Согласно выводу Лобачевского, можно заменить пятый постулат другим, противоречащим ему, но не противоречащим другим геометрическим аксиомам, положением, и взяв в качестве посылки конъюнкцию поло-

жения, на которое был заменён пятый постулат, и других аксиом геометрии, выводить из новой системы аксиом теоремы особого рода геометрии – такой, которая будет отлична от эвклидовой.

Из примера, который даёт нам жизнь и научная работа Лобачевского, можно видеть, что лейбницианская парадигма не просто совместима с идеями об иных геометриях, появившихся в XIX в., но даже, что стимулируемое этой парадигмой стремление к поиску оснований каждого положения, возможно, стало причиной открытия этих иных геометрий.

Достижения Лобачевского стали важным шагом на пути к формулировке геометрии Римана. Свои геометрические идеи Бернхард Риман изложил 10 июня 1854 г. в докладе «*Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen*» («О гипотезах, лежащих в основании геометрии»). Доклад был опубликован в 1868 г., уже после смерти Римана. Заслугой Римана здесь является разработка математического аппарата, который в дальнейшем был использован, в том числе, Эйнштейном при разработке общей теории относительности. В частности, Риман продолжил разработку теории кривизны пространства, начатую ещё Гауссом. С этим связаны, например, представления о кривизне поверхностей, о которых пишет Монастырский в своей научной биографии Римана [6, с. 36]: «Поверхности в зависимости от знака кривизны K делятся на три класса: поверхности положительной кривизны (например, сфера), поверхности нулевой кривизны (плоскость или тор) и поверхности отрицательной кривизны (например, крендель с двумя дырками или однополостный гиперболоид)». Риман распространил это понятие кривизны, разрабатывавшееся Гауссом, на пространства с каким угодно числом измерений.

Вот что дальше пишет Монастырский по этому поводу [6, с. 37]: «Рассмотрим любые три точки в пространстве M^n . Определим расстояния между ними, задав определенную метрику. Условие, чтобы любой такой треугольник мог двигаться как жесткое тело в пространстве, означает существование некоторой группы симметрии, преобразующей наше пространство и сохраняющей расстояние между точками. Например, если мы рассмотрим пространство с метрикой (3.7), приходим к обычному эвклидову пространству R^n где кривизна K равна нулю. Таким же, но более сложным способом можно получить пространство постоянной положительной и отрицательной кривизны». Под метрикой (3.7) здесь подразумевается метрика обычного эвклидова пространства, имеющая следующий вид (формула приведена по книге Монастырского, [6, с. 35] :

$$ds^2 = \sum_{i=1}^n (dx_i)^2.$$

Очевидно, что эта метрика основана на распространении теоремы Пифагора на случай n -мерного пространства. В общем же случае метрика римановых пространств имеет следующий вид [6, с. 35]:

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k$$

(по повторяющимся индексам подразумевается суммирование)

Далее, как отмечает Монастырский, «замечательно, что с каждым из этих трёх типов пространств связаны классические геометрии. С пространством положительной кривизны – эллиптическая риманова геометрия, с пространством нулевой кривизны – эвклидова геометрия и с пространством отрицательной кривизны – геометрия Лобачевского» [6, с. 37]. Итак, мы видим, что в системе Римана геометрия Лобачевского нашла своё место как одна из возможных римановых геометрий.

Теперь рассмотрим вопрос о том, как следует воспринимать полученные Лобачевским и Риманом результаты с точки зрения лейбницианской парадигмы. Подчеркну ещё раз, что эти достижения математиков XIX в. отделены от эпохи Лейбница более чем столетием, и поэтому у Лейбница не могло быть ни малейших представлений ни о неэвклидовых геометриях, ни о кривизне пространства.

Что же касается вопроса о возможности многомерных пространств, то Лейбниц такую возможность отрицал. Это видно, например, из пункта 351 его «Теодицеи», где он признаёт возможным, что где-то люди и животные рождаются из деревьев, но считает в принципе невозможным существование более трёх измерений: «В самом деле, мы не знаем, нет ли планет или зе-

мель, помещённых в некоторых более отдаленных местах универсума, где сказка о шотландских казарках (птицах, рождающихся из дерева) оказалась бы истинной, и нет ли стран, где можно было бы сказать:

... *Populos umbrosa crevit Fraxinus, et foeta viridis puer excidit alno?*

(... Тенистый ясень породил народы, и сильный мальчик появился от плодоносной ольхи).

Но не это надо думать об измерениях материи. Троякое измерение определено не по причине наилучшего, а вследствие геометрической необходимости; поэтому-то геометры могли доказать, что возможны только три линии, перпендикулярные одна другой, пересекающиеся в одной точке. Нельзя найти лучшего примера, показывающего различие между моральной необходимостью, зависящей от выбора мудреца, и грубой необходимостью Стратона и Спинозистов, не признающих в Боге разума и воли, чем это указание на различие между основаниями для законов движения и для трёх измерений: первое зависит от выбора наилучшего, а второе – от слепой геометрической необходимости» [5, с. 360-361].

Вероятно, для начала XVIII в. идея о возможности более трёх измерений пространства была столь необычна, что даже такой смелый ум как Лейбниц не отважился допустить такую возможность. Но составляет ли это отрицание Лейбницем возможности многомерных пространств часть того, что можно назвать лейбницианской парадигмой? То есть, действительно ли это положение вытекает из важнейших принципов философии Лейбница – таких как принципы противоречия, тождества неразличимых, достаточного основания, максимизации наилучшего, непрерывности? Я не вижу, как бы можно было вывести это положение из перечисленных принципов. Скорее, здесь Лейбниц говорит не о чём-то таком, что следует из принципов его философии, а о своём представлении о том, что в геометрии внутренне противоречиво, а что – нет. И, как можно судить из процитированного отрывка, существование пространства только двух измерений или более трёх измерений, с его точки зрения логически противоречиво. Но доказал ли кто-нибудь из геометров до начала XVIII столетия логическую противоречивость идеи пространства только двух измерений, или логическую противоречивость пространства более трёх измерений? Мне о таких доказательствах ничего не известно. Кроме того, начиная с Римана, исследования геометрий пространств какого угодно числа измерений не привели к выводам о том, что идея многомерных пространств логически противоречива. По всей видимости, идея римановых пространств логически непротиворечива и, поэтому, если строго следовать принципам лейбницианской парадигмы, следует признать, что есть такие возможные миры, в которых у пространства только два измерения, а есть возможные миры, в которых у пространства более трёх измерений. И такие выводы в рамках лейбницианской парадигмы действительно были сделаны. Сделал их, как ни удивительно, человек, чьё влияние, судя по всему, обусловило отрицание некоторыми лейбницианцами XIX в. (например, А. Козловым или Лотце; об этом можно подробно прочитать в Тринадцатой беседе с Петербургским Сократом, помещённой в выпуске 4 «Своего слова» Козлова [2, с. 382-397] и далее [2, с. 436-441]) ценности достижений Римана в области геометрии – И. Кант. Как известно, в ранний период своей научной карьеры Кант находился под влиянием лейбниц-вольфовской философской школы.

В одном из своих ранних произведений 1749 г. – «Мысли об истинной оценке живых сил» – в параграфе 9 Кант так оценивает приведённую выше цитату Лейбница из «Теодицеи»: «... в доказательстве, основанной у г-на фон Лейбница в одном месте его "Теодицеи" на количестве линий, которые могут быть проведены из одной точки перпендикулярно друг другу, я усматриваю порочный круг...» [1, с. 69]. Далее, в параграфе 10 [1, с. 69-70] Кант, сделав несколько предположений, теперь имеющих, наверное, чисто историческое значение, допускает существование множества других миров, пространства в которых содержат число измерений, отличное от трёх, и так подытоживает это своё рассуждение: «Наука обо всех этих возможных видах пространства, несомненно, представляла бы собой высшую геометрию, какую способен построить конечный ум». Впрочем, в параграфе 11 [1, с. 71] он отмечает, что такие иные пространства должны были

бы быть изолированы от нашего, а такая несвязность уменьшает степень совершенства сотворённого Богом мира, поэтому у Канта остаются некоторые сомнения относительно того, что было им сказано в параграфе 10.

Из приведённого выше рассуждения Канта можно увидеть, как лейбницианская парадигма способствует формированию у него (пусть и с некоторыми оговорками и сомнениями) идеи множества различных видов пространств, отличающихся друг от друга, в том числе, и количеством измерений. Кант смело критикует своих учителей – Лейбница и Вольфа, но продолжает развивать лейбницианскую парадигму, и это приводит его к идее многомерных пространств.

Как указывает К. Фишер, «В сочинении о единственно возможном основании доказательства бытия Бога Кант случайно возвращается к этому вопросу, чтобы заметить, что в нём заключается нерешенная проблема. "Я сомневаюсь, чтобы когда-либо было правильно объяснено, что такое пространство. Однако, не входя в подробное рассмотрение этого вопроса, я всё же убежден, что там, где есть пространство, должны быть внешние отношения, что пространство не может иметь более трёх измерений"» [7, стр. 314-315]. В эпоху критического периода развития своей философии Кант окончательно отказался от лейбницианской парадигмы и предложил свою философскую концепцию, в рамках которой пространство стало рассматриваться как трансцендентальное условие самого опыта. В рамках этой концепции пространство объявлялось как то, что может быть только трёхмерным, а вопрос о том, каковы основания для того, чтобы оно оказалось таким становится неправомерным: ведь всё, что мы знаем, мы узнаём из опыта, а пространство как одно из необходимых условий опыта само не дано нам в опыте. Такой подход, по моему, делает бессмысленными попытки выяснить, почему у пространства три измерения, а не два или четыре. Таким образом, хотя Лейбниц и ошибся, заявив, что трёхмерность пространства – это доказанная необходимая истина, всё же лейбницианская парадигма способствует поиску оснований его трёхмерности. Кантианская парадигма же приводит к исключению пространства и вопроса о числе его измерений из объектов познания. Кант критического периода не утверждал прямо, что пространство трансцендентно, то есть находится за пределами опыта и, поэтому непознаваемо для теоретического разума (или, иными словами, что оно непознаваемо для науки). Это он утверждал только относительно вещи в себе – сущности явлений, благодаря которой данное нам в опыте не является просто потоком сновидений. Однако Кант критического периода утверждал, что пространство – это одна из трансцендентальных форм опыта, или, иными словами, априорное, предшествующие самому опыту, условие существования самого опыта. Пространство, согласно такому взгляду, не феномен, а нечто, предшествующие самим феноменами, необходимое их условие. Но если предметами научного познания являются только феномены, то как можно познавать пространство, если оно, хоть и не находится за пределами опыта, но, всё равно, не оказывается и в числе предметов научного познания?

Здесь следует отметить, что взгляды на философию Канта критического периода, изложенные в предыдущем абзаце, не является общепризнанным. Согласно моему взгляду, познание трансцендентальных форм у Канта не является эмпиричным, но, в таком случае, остаётся неясным, каково это познание. Совершенно иным образом трактовал философию Канта Якоб Фридрих Фриз (1773-1843) – немецкий посткантовский философ. На такой особый взгляд Фриза на познание трансцендентальных форм указывает, в частности К. Фишер в том месте своей «Истории новой философии», где он говорит о тройной антитезе [8, с. 648-651], возникшей в посткантовской философии. Фишер говорит это вполне в духе гегельянской философии, последователем которой и был. Эта антитеза по Фишеру касалась трёх основных моментов философии Канта – принципов, вопроса о единстве и вопроса о роли разума. С точки зрения принципов философия Канта, как утверждает Фишер, метафизична, с точки зрения вопроса о единстве – монистична, а с точки зрения вопроса о роли разума – идеалистична (возможно, точнее эту мысль Фишера выразил бы не термин «идеализм», а термин «рационалистический идеализм»). Каждый из этих тезисов, по Фишеру, имел антитезис: первая из антитез противостояла всем трём отмеченным Фише-

ром моментам, вторая антитеза – только второму и третьему, третья антитеза – только третьему. Каждый из этих антитезисов имел своего выразителя в рамках посткантовской философии. Выразителем первого антитезиса – антиметафизического, антимонистического и антиидеалистического (антиаприористического) – и был, по оценке Фишера, Фриз, а выразителями двух других антитез были, соответственно, Гербарт и Шопенгауэр.

Фишер так характеризует философию Фриза: «Первая антитеза идет дальше всего: она утверждает необходимость нового обоснования учения о познании, но она отвергает метафизическое, монистическое и идеалистическое (априористическое) направления как средства для решения этой задачи и в качестве единственного пути для познания системы наших способностей разума требует наблюдения над нашей внутренней жизнью, эмпирического и психологического исследования. Истинная критика разума не может быть ничем иным, как «внутренней антропологией, теорией внутренней жизни, естественной историей человеческой души» [8, с. 648]. Соответственно этому основным учением является не метафизика, а «философская антропология»: в этом направлении должны быть заново обоснованы критика разума и учение о познании. Представителем этой точки зрения, основавшим школу и оказавшим известное влияние, является Яков Фридрих Фриз» [8, с. 648].

И далее: «Послекантовская философия распадается на метафизическое и антропологическое направления. Чем иным, если не внутренней или философской антропологией, может стремиться стать познание человеческого разума, а следовательно, критика разума. Так учит Фриз и его сторонники. Как может антропология стремиться быть основной философской наукой, если она сама, как вообще все опытные науки, нуждается в обосновании? Так отвечают противники» [8, с. 648-649].

И Фриз, и Гербарт, и Шопенгауэр, несмотря на всё различие в своих взглядах, согласно Фишеру, имели нечто общее: а именно, они отвергли метафизический идеализм (то есть, тройственный тезис метафизическое-монистическое-идеалистическое). Здесь нас больше всего интересует точка зрения Фриза на познание трансцендентального, поскольку именно она наиболее отчетливо противостоит моему взгляду на то, что такое кантианство. Как утверждает Фишер, этот взгляд Фриза таков: учение метафизического идеализма «совершенно ложно, ... , так как критический идеализм не метафизичен, а антропологичен, и познание наших трансцендентальных способностей не трансцендентально (априорно), а эмпирично. В этом ошибочном понимании, которое смешивает психологию с метафизикой, объект познания со способом познания, принимая познание трансцендентального за трансцендентальное познание, заключается "предрассудок трансцендентального, кантовский предрассудок", господствующий во всяком метафизическом идеализме» [8, с. 652].

Эту точку зрения Фриза можно рассматривать, как особого рода трактовку кантовской философии, при которой сама эта философия оказывается чем-то менее губительным для математики, чем учение о том, что пространство не дано нам в опыте. Ведь по Фризу познание трансцендентальных форм не априорно, а эмпирично, а одна из этих трансцендентальных форм по Канту и есть пространство. Следовательно, и познание пространства эмпирично. Ведь если познание пространства эмпирично, то само пространство, как и феномены, тоже представляет предмет познания, а значит вполне правомерно искать ответы на вопросы о том, почему пространство именно такое, может ли в нём быть больше трёх измерений, если может, то как это возможно, а если не может, то почему? Такой развивавшийся Фризом подход, в отличие от того, что Фишер назвал метафизическим идеализмом, не парализует размышления о пространстве и совместим с прогрессом в математике.

Я могу согласиться с Фризом насчёт того, что познание пространства эмпирично. Но действительно ли такой подход адекватно отражает то, что можно назвать кантианской парадигмой? Как указывает далее Фишер, «Между тем метафизический идеализм или принявшее идеалистическое направление учение об идентичности было первым и ближайшим направлением, проис-

шедшим из кантовский критики. Сам философ не только наметил это направление, но и пошёл по этому пути» [8, с. 652]. Поэтому, по всей видимости, метафизический идеализм – это парализующее размышления о пространстве направление – и есть ядро кантианской парадигмы.

В свете сказанного, я продолжаю придерживаться мнения, согласно которому, лейбницианская парадигма способна стимулировать поиск ответов на вопросы, касающиеся пространства, кантианская же парадигма, напротив, парализует этот поиск. Принимая это во внимание, можно поставить вопрос: действительно ли кантианская парадигма стала шагом вперёд в философии по сравнению с лейбницианством?

К сказанному следует добавить, что, как указывает Алексей Козлов [2, с. 139], Бернхард Риман как философ не был представителем ортодоксального кантианства. Впрочем, не был он и последователем Фриза. По свидетельству Козлова Риман был герbartарианцем.

Литература

1. *Кант И.* Сочинения. В 8-ми т. – Т.1. – М.: ЧОРО, 1994 – 544 с.
2. *Козлов А.А.* Сочинения в четырёх томах. Т.1. Своё слово. Мелитополь: ФЛП Однорог Т.В., НПУ, 2017. – 606 с.
3. *Лейбниц Г.В.* Сочинения в четырёх томах, том 1. – М.: Мысль, 1982. – 636 с.
4. *Лейбниц Г.В.* Сочинения в четырёх томах, том 3. – М.: Мысль, 1984. – 734 с.
5. *Лейбниц Г.В.* Сочинения в четырёх томах, том 4. – М.: Мысль, 1989. – 554 с.
6. *Монстырский М.И.* Бернхард Риман. Топология. Физика. – М., 1999. – 188 с.
7. *Фишер К.* История новой философии. Том 4. Иммануил Кант и его учение. Часть первая. – Спб.: Издание т-ва «Знание», 1906 – 635 с.
8. *Фишер К.* История новой философии. Том 4. Иммануил Кант и его учение. Часть вторая. – Спб.: Издание т-ва "Знание", 1906 – 657 с.