НАУЧНЫЕ ПРОБЛЕМЫ ГЕОМЕТРИИ

УДК 514
DOI: 10.12737/2308-4898-2022-10-4-3-12

Н.А. Сальков
Канд. техн. наук, профессор,
Московский государственный академический
художественный институт имени В.И. Сурикова,
Россия, 109004, г. Москва, Товарищеский переулок, д. 30

Об одном способе формирования коник

Аннотация. В статьях журнала «Геометрия и графика», посвященных свойствам циклиды Дюпена, было рассмотрено построение коник – эллипса, гиперболы и параболы, – используя свойства циклиды. При этом центр преобразования был расположен на прямой, соединяющей центры двух базовых окружностей, а расположение его на такой прямой оговаривалось отдельно и находился как центр гомотетии. Для построения параболы необходимо было вместо второй окружности брать прямую линию, а центр преобразования – центр гомотетии – должен был располагаться в точке пересечения прямой, проходящей через центр первой окружности перпендикулярно второй окружности-прямой, с первой окружностью. Получались в результате преобразования две разные параболы. В данной работе доказывается, что, если взять центр соответствия не принадлежащим окружности, получаются другие кривые второго порядка – эллипсы и гиперболы. Построение именно эллипса геометрически доказывается. Для этого центр соответствия должен лежать на прямой, соединяющей центры окружностей, но вне действительной окружности. Рассмотрено несколько примеров. Если же центр соответствия находится внутри окружности, будем иметь гиперболу. Таким образом, имея первоначально заданной одну только конфигурацию из прямой и окружности, можно получать все коники: и эллипсы, и параболы, и гиперболы, переходящие одна в другую. Предлагаемая схема построения коник может быть применена для компьютерного вычерчивания всех коник, что является более удобным, нежели при имеющихся вариантах, зашитых в сегодняшние графические системы вычерчивания.

Ключевые слова: геометрия, начертательная геометрия, высшее образование, геометрическое образование.

N.A. Salkov
Ph.D. in Engineering, Professor,
Moscow State Academic Art Institute named after V.I. Surikov,
30, Tovarishcheskiy per., Moscow, 109004, Russia

About One Way of Forming Conics

Abstract. In the articles of the Geometry and Graphics magazine devoted to the properties of the Dupin cyclide, the construction of a conic – ellipse, hyperbola and parabola – using the properties of the cyclide was considered. At the same time, the center of the transformation was located on a straight line connecting the centers of the two base circles, and its location on such a straight line was negotiated separately and was located as the center of homology. To construct a parabola, it was necessary to take a straight line instead of the second circle, and the center of the transformation – the center of homology – had to be located at the intersection point of a straight line passing through the center of the first circle perpendicular to the second circle-a straight line with the first circle. Two different parabolas were obtained as a result of the transformation. In this paper, it is proved that if we take the center of correspondence that does not belong to a circle, we get other second–order curves - ellipses and hyperbolas. The construction of an ellipse is geometrically proved. To do this, the center of correspondence must lie on a straight line connecting the centers of the circles, but outside the actual circle. Several examples are considered. If the center of correspondence is inside the circle, we will have a hyperbola. Thus, having initially given only one configuration from a straight line and a circle, it is possible to obtain all conics: ellipses, parabolas, and hyperbolas, passing into one another. The proposed scheme for constructing conics can be used for computer drawing of all conics, which is more convenient than with the available options sewn into today's graphical drawing systems.

Keywords: geometry, descriptive geometry, higher education, geometric education.

Вопросы построения коник рассматривались во многих работах [1–33], эти проблемы интересны и сейчас [2; 6; 14]. Даже в настоящее время защищаются докторские диссертации, использующие коники в своих изысканиях [18]. Следует добавить, что коники применяются во многих практических задачах и конструкциях [1; 13; 15; 19–32].

В данной работе построение коник будет рассматриваться с точки зрения свойств циклиды Дюпена, в которой совокупность двух окружностей и центра преобразования определяют построение точек кривой второго порядка.

Известно [26; 27], что одна из коник – парабола – может быть построена при помощи двух окружностей, одна из которых имеет в качестве центра несобственную точку, т.е. представлять собой прямую линию. На рис. 1 показано подобное построение с окружностями m_1 и m_2. Точки S_1 на рис. 1, *а* и S_2 на рис. 1, *б* являются центрами преобразований. В [23] доказано, что полученные кривые p являются именно параболами. Главным условием для построения парабол является принадлежность центров преобразования S_1 и S_2 окружности m_1. При этом в зависимости от того, ближе или дальше от прямой m_2 находится центр преобразований, получаем или одну, или другую параболу.

Итак, только когда центр преобразования принадлежит базовой окружности, только тогда мы будем иметь параболу.

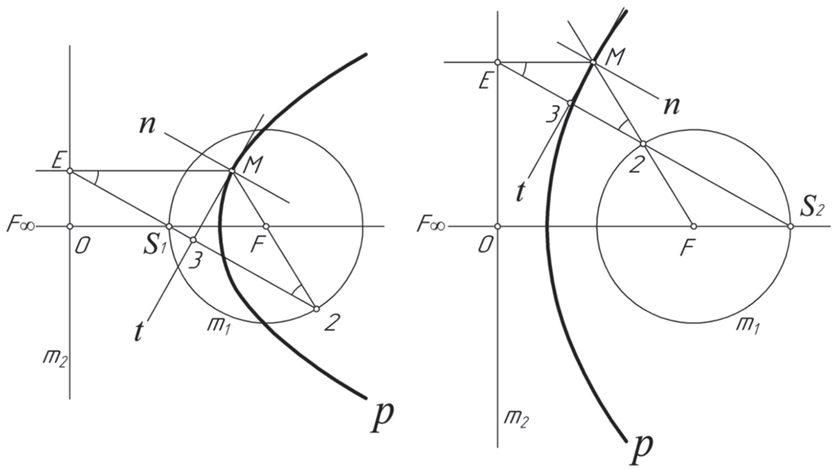

Рис. 1

А что же получится, если центр преобразования не будет принадлежать базовой окружности? Разберемся в этом вопросе.

Пример 1

Попробуем построить эллипс нижепредлагаемым способом.

Возьмем большую *AB* и малую *CD* оси эллипса и на основании их, как это предлагается в любой графической системе — КОМПАС, *AutoCAD* или какой-либо другой, – построить точки эллипса.

На рис. 2 на базе этих четырех точек построен прямоугольник с одной из вершин *E*. При проведении окружности радиуса *CE* и центром в точке *C* будем иметь в пересечении построенной окружности с осью *AC* точки F_1 и F_2 – фокусы эллипса. При этом, что вполне очевидно, $AB = CF_1 + CF_2$.

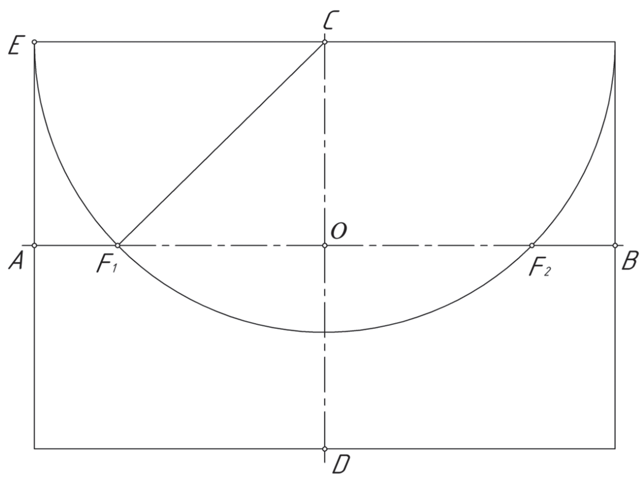

Рис. 2

Из точки *E* (рис. 3) проведем к CF_1 перпендикуляр: $ET \perp CF_1$.

Рассмотрим полученные треугольники: ΔAEF_1 и ΔTEF_1. Они равны. Докажем это.

Из рис. 3 видно, что $\angle CF_1E = \angle CEF_1$, поскольку $CF_1 = CE$ по построению и $\Delta CEF1$ – равнобедренный.

С другой стороны, $\angle CEF_1 = \angle AF_1E$ как внутренние накрестлежащие.

Отсюда $\Delta AEF_1 = \Delta TEF_1$ как прямоугольные треугольники, имеющие все три угла равными друг другу с общей гипотенузой.

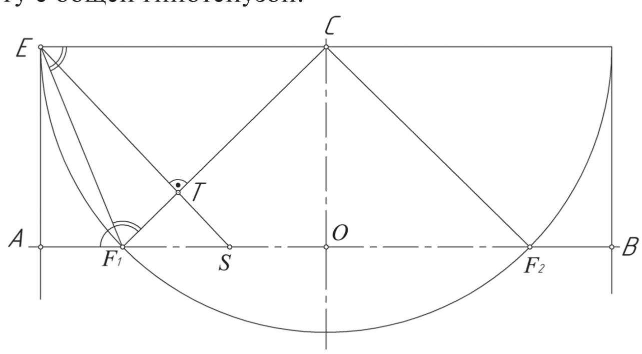

Рис. 3

Поскольку $AF_1 = TF_1$, проводим окружность радиусом AF_1 с центром в точке F_1 (рис. 4).

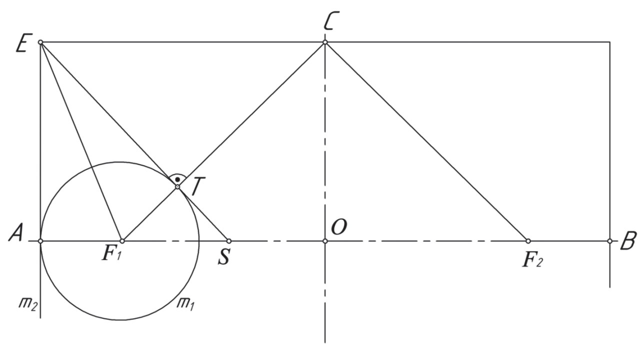

Рис. 4

Прямая ET пересекает большую ось AB в точке S, которую будем считать центром преобразований. Центр S не принадлежит только что построенной окружности, а мы имеем все атрибуты эллипса, у которого точка T – касания первого луча SE, проведенного к первой окружности преобразования m_1, – дает точку C – самую отдаленную от большой оси эллипса и являющуюся одной из его вершин. Осталось только доказать, что и любые построенные при преобразовании с помощью окружностей m_1 и m_2 точки принадлежат эллипсу.

Докажем это.

Будем строить по принципу, показанному на рис. 1, с применением свойств циклиды Дюпена. Пусть заданы большая (AB) и малая (OD) оси эллипса. Находим фокусы эллипса (рис. 2). Строим две окружности: m_1 и m_2 (рис. 4). Одна из них – прямая (m_2). Имеем в результате центр преобразования S_1.

Проведем новый луч SE_1 (рис. 5).

Он пересекает окружность: m_1 в двух точках (показана одна – 1), а окружность m_2 — в точке E_1. Соединяем эти точки с центрами окружностей: с центром F_1 окружности m_1 и центром F_2^{∞} окружности m_2. Поскольку центр окружности m_2 находится в бесконечности, то любая прямая, перпендикулярная m_2, будут проходить через него. Получаем лучи $F_1 1$ и E_1M, которые, пересекаясь, дадут искомую точку эллипса M.

Осталось только доказать, что, согласуясь с законом построения эллипса, $F_1M + F_2M = F_1C + F_2C = const$.

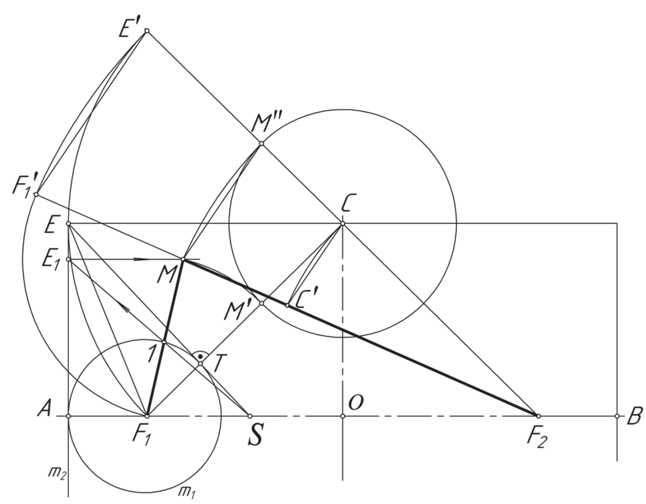

Рис. 5

Для доказательства рассмотрим более подробно (рис. 5).

1. Проводим окружность радиуса $F_1 1$ с центром в точке F_1. Отмечаем точку T на прямой F_1C.
2. Проводим дугу окружности радиуса F_1M с центром в точке F_1. Отмечаем точку M' на прямой F_1C.
3. На продолжении прямой F_2C откладываем за точку C расстояние $F_1C = CE$. Получаем точку E'.
4. Проводим дугу F_1M с центром в точке F_1 до пересечения с продолжением прямой F_2M. Получаем точку F_1' *с* равенством отрезков $F_1M = F_1'M$.

   Докажем, что $F_2F_1'M = F_2E'$.

Из представленной конфигурации видно, что $F_2C' = F_2C$; $MC' = M''C$; $E'M'' = E'C - M''C$ и $F_1'M = F_1'C' - MC'$.

С одной стороны, $F_1M' = E'M''$, так как по построению $E'C = F_1'C$ и $MC' = M''C$. С другой стороны, $F_1M' = F_1M = F_1'M$. Отсюда $F_1'M = E'M''$.

Из полученных равенств $F_1'M = E'M''$; $MC' = M''C$ и $F_2C' = F_2C$ получаем окончательно $F_2F_1' = F_2E'$. Таким образом, $F_1M + F_2M = F_1C + F_2C = const$.

Что и требовалось доказать.

Вторая точка по построению и доказательству принадлежности эллипсу не отличается от рассмотренной.

По теории коника должна быть построена по пяти параметрам. Задание прямой m_2 фиксирует два параметра, точки O – два параметра и половины малого диаметра (точки C) – один параметр. Все пять параметров заданы.

На рис. 6 показан построенный эллипс с двумя точками M и N, полученными при помощи одного луча SE_1.

Поскольку мы брали произвольный луч, выходящий из центра преобразования S, то и любой другой луч, проведенный через S, будет давать в результате две точки, принадлежащие эллипсу (см. рис. 6).

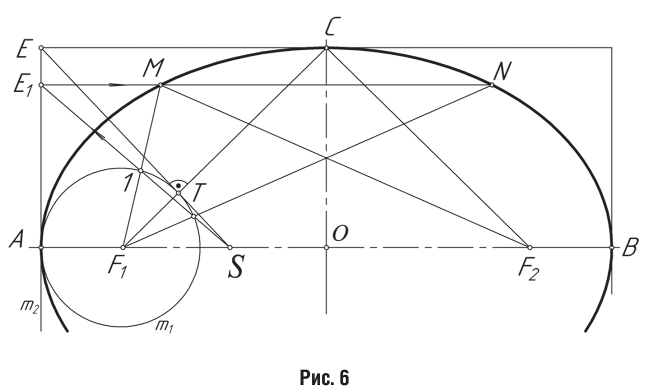

Рис. 6

Итак, делаем вывод: если точка, взятая как центр преобразования, находится на линии, соединяющей центры окружностей (одна из которых прямая), но находится вне действительной окружности, то мы получаем обязательно эллипс.

Рассмотрим еще несколько примеров, считая рассмотренный пример первым.

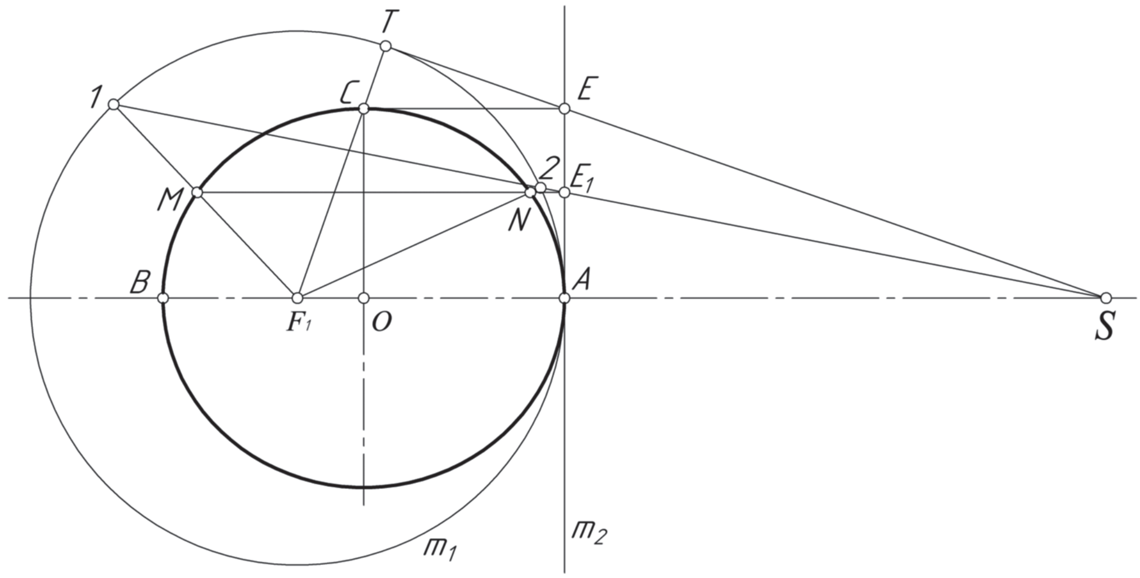

Рис. 7

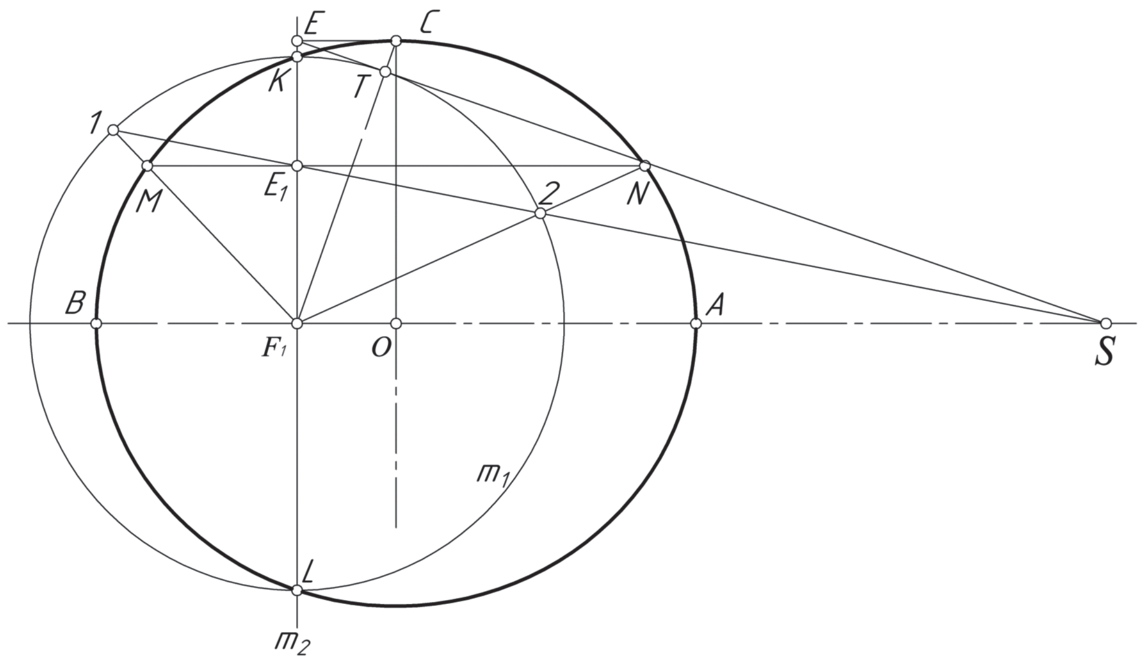

Рис. 8

Пример 2

Пусть нам заданы окружности m_1 и m_2 (рис. 7), а также центр преобразований S, расположенный на прямой, соединяющей центры окружностей. При этом центр S и окружность m_1 находятся по разные стороны от m_2.

На рис. 7 показано построение вершины C, центра эллипса O и двух точек эллипса M и N.

Вывод следующий. Если центр преобразования S находится вместе с окружностью m_1 по одну сторону от прямой m_2, то эллипс проходит вне окружности m_1. Если центр преобразования S находится с окружностью m_1 по разные стороны от прямой m_2, то эллипс проходит внутри окружности m_1.

Пример 3

Пусть прямая m_2 проходит через центр окружности F_1 (рис. 8).

В этом примере все построения аналогичны предыдущим примерам. Видно, что эллипс проходит через точки пересечения линий m_1 и m_2 – точки K и L.

А сам эллипс проходит как внутри, так и снаружи окружности m_1.

Пример 4

Пусть прямая m_2 проходит внутри окружности m_1, но не проходит через центр. Пример рассмотрен на рис. 9.

В данном примере, как и в предыдущем, эллипс проходит как внутри, так и снаружи окружности m_1, а границами являются точки пересечения данных линий m_1 и m_2 – K и L.

В рассмотренных случаях мы познакомились с задачами, в которых центр преобразования находился по одну сторону от обеих линий. Рассмотрим случай, когда точка S расположена между линиями m_1 и m_2.

Пример 5

Даны две линии m_1 и m_2, окружность и прямая, центр преобразований S расположен между ними (рис. 10).

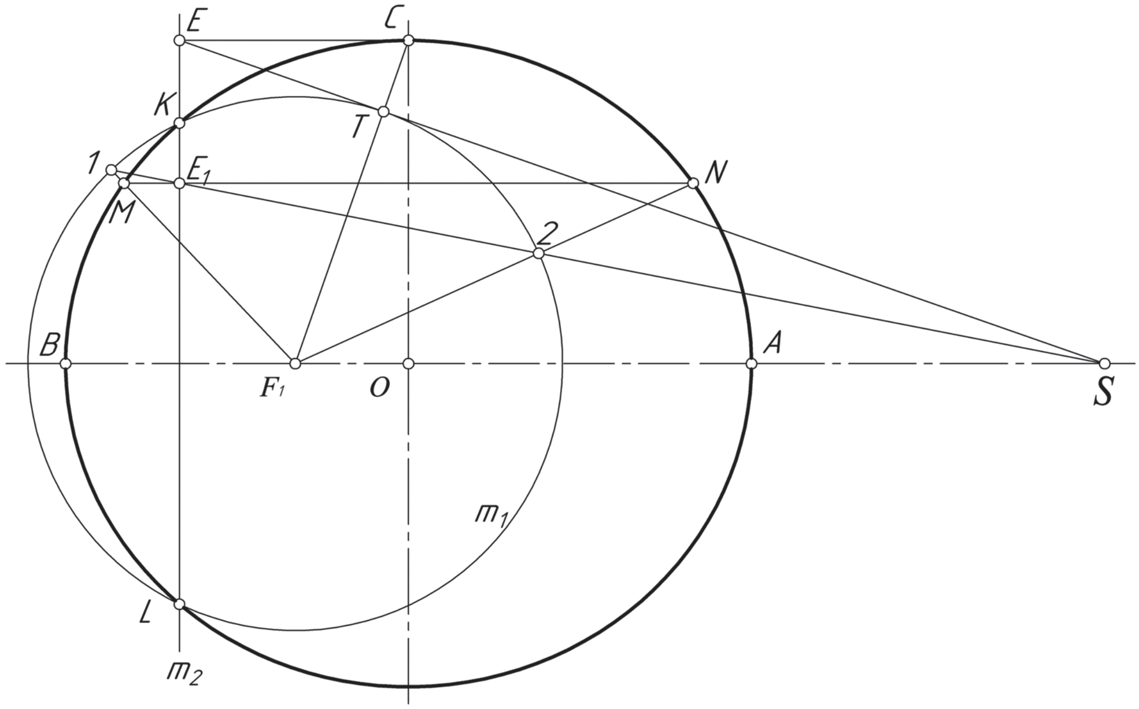

Рис. 9

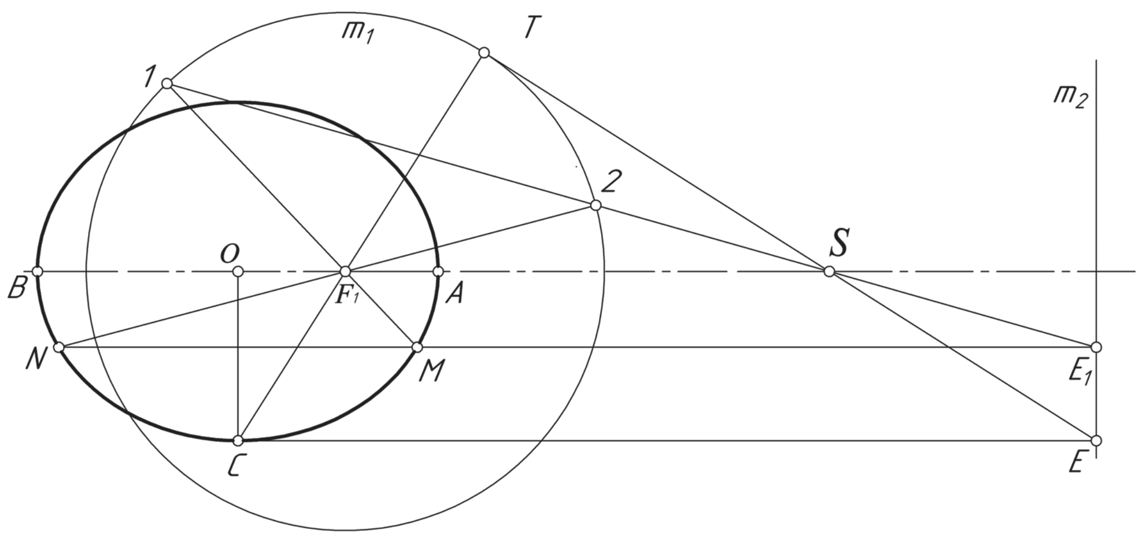

Рис. 10

Все построения идентичны предыдущим. Сначала находим с помощью касательной ST вершину эллипса T, а с ним и центр эллипса – точку O. Затем можно найти большой диаметр эллипса $AB = 2 \times F_1C$. И переходим к нахождению точек, принадлежащих эллипсу.

Итак, если центр преобразования находится вне данной окружности, всегда будем иметь эллипс.

Рассмотрим примеры, когда центр преобразования находится внутри окружности. По здравом размышлении в таком случае должна получиться гипербола. И действительно, рассмотрим пример 6.

Пример 6

Даны две линии m_1 и m_2, окружность и прямая, центр преобразований S расположен внутри окружности m_1 (рис. 11).

Здесь показаны построения точек M и N при помощи луча 12 и точек K и L, полученные при помощи луча 34. Точка A – точка касания данных окружности m_1 и прямой m_2 – будет являться одной из двух вершин гиперболы.

Все построения аналогичны предыдущим.

Как и на рис. 2–6, одна из вершин – точка A – находится в точке касания данных прямой и окружности.

Асимптоты u и v находятся согласно [24; 26], одна из них – прямая v – найдена по стрелке как прямая $O5$. Точка 5 находится как точка пересечения окружности с центром в точке O радиуса OF_1 с прямой m_1, проходящей через одну из вершин гиперболы – точку A. Вторая асимптота u находится аналогично.

Таким образом, при посредстве прямой и окружности путем перспективного преобразования с помощью выбранного на оси, соединяющей центры данных окружностей, центра преобразования получаем одну из коник в зависимости от места расположения этого центра преобразования.

Итак, посредством двух окружностей и центра преобразования получаем построение коник, как уже было доказано в [24]. В данном рассматриваемом случае центр второй окружности переместился в бесконечность.

Выводы

1. Если даны прямая, окружность и центр преобразования S, расположенный на прямой (оси), проходящей через центр данной окружности и перпендикулярной данной прямой, то в результате преобразования получаем одну из коник: эллипс, параболу, гиперболу.
2. Если центр преобразования расположен вне данной окружности, получаем эллипс.
3. Если центр преобразования расположен на окружности, получаем параболу.

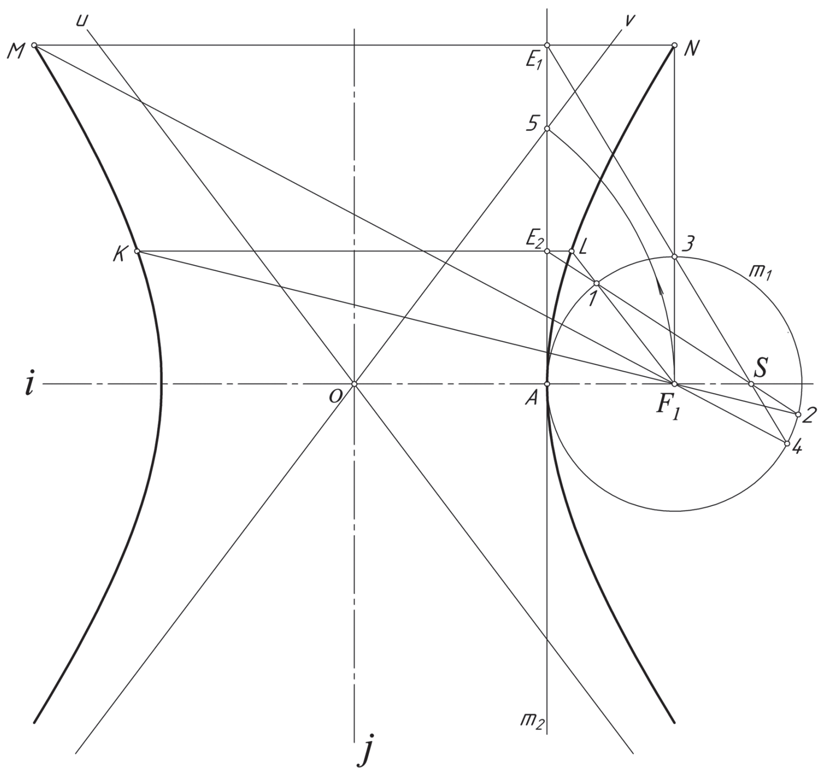

Рис. 11

4. Если центр преобразования расположен внутри окружности, получаем гиперболу.
5. Центр данной окружности всегда является одним из двух фокусов коники. В случае параболы второй фокус находится в бесконечности.
6. При касании данных прямой и окружности, точка касания является одной из вершин коники.
7. При выходе из R^2 в R^3, т.е. из плоскости в пространство, прямая превращается в плоскость, окружность – в сферу, а в результате преобразования имеем поверхности вращения: параболоид вращения с действительной осью в качестве оси вращения, эллипсоид вращения с большим диаметром в качестве оси вращения, двуполостный гиперболоид вращения с действительной осью в качестве оси вращения.
8. Если центр преобразования совпадает с центром окружности, получаем прямую m_2. То есть ветви гиперболы, которая должна получиться при расположении центра преобразования внутри окружности m_1, вырождаются в две совпавшие с прямой m_2 прямые линии.
9. Если центр преобразования совпадает с центром окружности m_2, т.е. находится в бесконечности, получаем окружность m_1. Таким образом, эллипс, который должен иметь место при расположении центра преобразования вне окружности m_1, в данном случае имеет совпавшие фокусы и превращается в окружность.

Литература

1. *Бабаков В.В.* Проектирование поверхностей кривыми второго порядка в самолетостроении [Текст] / В.В. Бабаков. — М.: Машиностроение, 1969. — 124 с.
2. *Беглов И.А.* Математическое описание метода вращения точки вокруг криволинейной оси второго порядка [Текст] / И.А. Беглов, В.В. Рустамян, И.В. Антонова // Геометрия и графика. — 2018. — Т. 6. — № 4. — С. 39–46. — DOI: 10.12737/article_5c21f6e832b4d2.25216268.
3. *Белогужев В.А.* Проективные способы построения основных параметров кривых второго порядка, заданных полным полярным соответствием и одним из их элементов [Текст] / В.А. Белогужев // Вопросы начертательной геометрии и инженерной графики: научные труды. — Ташкент: ФАН, 1966. — Вып. 39. — С. 10–21.
4. *Бергер Э.Г.* К синтезу механизмов для огибания конических сечений методом проективной геометрии [Текст] / Э.Г. Бергер // Прикладная геометрия и инженерная графика: межведомственный республиканский научн. сб. — Киев: Будівельник, 1973. — Вып. 16. — С. 110–113.
5. *Волошинов Д.В.* Единый конструктивный алгоритм построения фокусов кривых второго порядка образов [Текст] / Д.В. Волошинов // Геометрия и графика. — 2018. — Т. 6. — № 2. — С. 47–54. — DOI: 10.12737/article _5b559dc3551f95.26045830.
6. *Гирш А.Г.* Взаимные задачи с кониками [Текст] / А.Г. Гирш // Геометрия и графика. — 2020. — Т. 8. — № 1. — С. 4–17. — DOI: 10.12737/2308-4898-2020-15-24.
7. *Гирш А.Г.* Фокусы алгебраических кривых [Текст] / А.Г. Гирш // Геометрия и графика. — 2015. — Т. 3. — № 3. — С. 4–17. — DOI: 10.12737/14415.
8. *Графский О.А.* Об установлении взаимной связи ряда и пучка второго порядка [Текст] / О.А. Графский // Геометрия и графика. — 2016. — Т. 4. — № 2. — С. 8–18. — DOI: 10. 12737/19828.
9. *Графский О.А.* Особенности свойств параболы при ее моделировании [Текст] / О.А. Графский, Ю.В. Пономарчук, В.В. Суриц // Геометрия и графика. — 2018. — Т. 6. — № 2. — С. 63–77. — DOI: 10.12737/ article_5b55a 16b547678.01517798.
10. *Ермакова В.А.* О касании кривых 2-го порядка [Текст] / В.А. Ермакова // Кибернетика графики и прикладная геометрия поверхностей: сб. статей под ред. И.И. Котова. Труды института, вып. 2. — М.: Изд-во МАИ, 1968. — С. 77–81.
11. *Короткий В.А.* Гомология двух конических сечений [Текст] / В.А. Короткий // Совершенствование подготовки учащихся и студентов в области графики, конструирования и стандартизации: межвуз. науч.-метод. сб. — Саратов: Изд-во СГТУ, 2012. — С. 27–33.
12. *Короткий В.А.* Графические алгоритмы реконструкции кривой второго порядка, заданной мнимыми элементами [Текст] / В.А. Короткий, А.Г. Гирш // Геометрия и графика. — 2016. — Т. 4. — № 4. — С. 19–30. — DOI: 10.12737/22840.
13. *Короткий В.А.* Кривые второго порядка в задачах формообразования архитектурных оболочек [Текст] / В.А. Короткий, Е.А. Усманова // Известия ВУЗов. Серия «Строительство». — 2014. — № 9–10. — С. 101–107.
14. *Короткий В.А.* Кривые второго порядка на экране компьютера [Текст] / В.А. Короткий, Е.А. Усманова // Геометрия и графика. — 2018. — Т. 6. — № 2. — С. 101–113. — DOI: 10.12737/ article_5b55a829cee6c0.74112002.
15. *Короткий В.А.* Применение кривых второго порядка для конструирования гладких каркасно-сетчатых поверхностей [Текст] / В.А. Короткий, Е.А. Усманова // Вестник ЮУрГУ. Серия «Строительство и архитектура». — 2014. — Т. 14. — № 3. — С. 45–48.
16. *Короткий В.А.* Проективное соответствие пучков конических сечений [Текст] / В.А. Короткий // Информационные технологии и технический дизайн в профессиональном образовании и промышленности: сб. матер.

5-й Всеросс. науч.-практ. конф. с международным участием. — Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2013. — С. 49–56.
17. *Короткий В.А.* Соприкосновение коник [Текст] / В.А. Короткий // Совершенствование подготовки учащихся и студентов в области графики, конструирования и стандартизации: межвуз. науч.-метод. сб. — Саратов: Изд-во СГТУ, 2011. — С. 78–82.
18. *Короткий В.А.* Формообразование линий и поверхностей на основе кривых второго порядка в компьютерном геометрическом моделировании: 05.01.01 «Инженерная геометрия и компьютерная графика»: автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора технических наук [Текст] / В.А. Короткий; Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет. — Нижний Новгород, 2018. — 38 с.
19. *Короткий В.А.* Эллиптический купол на треугольном или четырехугольном фундаменте [Текст] / В.А. Короткий // Приволжский научный журнал. — 2015. — № 1. — С. 96–102.
20. *Сальков Н.А.* Графо-аналитическое решение некоторых частных задач квадратичного программирования [Текст] / Н.А. Сальков // Геометрия и графика. — 2014. — Т. 2. — № 1. — С. 3–8. — DOI: 10.12737/3842.
21. *Сальков Н.А.* Приложение свойств циклиды Дюпена к изобретениям [Текст] / Н.А. Сальков // Геометрия и графика. — 2017. — Т. 5. — № 4. — С. 37–43. — DOI: 10.12737/article_5a17fd233418b2.84489740.
22. *Сальков Н.А.* Свойства циклид Дюпена и их применение. Ч. 1 [Текст] / Н.А. Сальков // Геометрия и графика. — 2015. — Т. 3. — № 1. — С. 16–25. — DOI: 10.12737/10454.
23. *Сальков Н.А.* Свойства циклид Дюпена и их применение. Ч. 2 [Текст] / Н.А. Сальков // Геометрия и графика. — 2015. — Т. 3. — № 2. — С. 9–23. — DOI: 10.12737/12164.
24. *Сальков Н.А.* Свойства циклид Дюпена и их применение. Ч. 3: сопряжения [Текст] / Н.А. Сальков // Геометрия и графика. — 2015. — Т. 3. — № 4. — С. 3–14. — DOI: 10.12737/17345.
25. *Сальков Н.А.* Свойства циклид Дюпена и их применение. Ч. 4: приложения [Текст] / Н.А. Сальков // Геометрия и графика. — 2016. — Т. 4. — № 1. — С. 21–32. — DOI: 10.12737/17347.
26. *Сальков Н.А.* Циклида Дюпена и кривые второго порядка. Ч. 1. [Текст] / Н.А. Сальков // Геометрия и графика. — 2016. — Т. 4. — № 2. — С. 19–28. — DOI: 10.12737/19829.
27. *Сальков Н.А.* Циклида Дюпена и кривые второго порядка. Ч. 2 [Текст] / Н.А. Сальков // Геометрия и графика. — 2016. — Т. 4. — № 3. — С. 17–28. — DOI: 10.12737/21530.
28. *Сальков Н.А.* Эллипс: касательная и нормаль [Текст] / Н.А. Сальков // Геометрия и графика. — 2013. — Т. 1. — № 1. — С. 35–37. — DOI: 10.12737/470.
29. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2020616015 Российская Федерация. Гипербола: № 2020612357: заявл. 04.03.2020: опубл. 05.06.2020 [Текст] / Н.А. Сальков, Д.В. Волошинов; заявитель Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Санкт-Петербургский государственный университет телекоммуникаций им. проф. М.А. Бонч-Бруевича».
30. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2020614640 Российская Федерация. Парабола: № 2020612401: заявл. 04.03.2020: опубл. 20.04.2020 [Текст] / Н.А. Сальков, Д.В. Волошинов; заявитель Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Санкт-Петербургский государственный университет телекоммуникаций им. проф. М.А. Бонч-Бруевича».
31. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2020616140 Российская Федерация. Эллипс: № 2020612388: заявл. 04.03.2020: опубл. 10.06.2020 [Текст] / Н.А. Сальков, Д.В. Волошинов; заявитель Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Санкт-Петербургский государственный университет телекоммуникаций им. проф. М.А. Бонч-Бруевича».
32. *Хейфец А.Л.* Коники как сечения квадрик плоскостью (обобщенная теорема Данделена) [Текст] / А.Л. Хейфец // Геометрия и графика. — 2017. — Т. 5. — № 2. — С. 45–58. — DOI: 10.12737/article_5953f32172a8d8.94863595.
33. *Salkov N.A.* Setting of the Dupin cyclide by three straight lines and sphere / N.A. Salkov. Text: direct // IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Ser. 1791 (2021) 012060. doi:10.1088/1742-6596/1791/1/012060.

References

1. Babakov V.V. *Proektirovanie poverxnostej krivy'mi vtorogo poryadka v samoletostroenii* [Designing surfaces with second-order curves in aircraft construction]. Moskow, Mashinostroenie Publ., 1969. 124 p. (in Russian)
2. Beglov I.A., Rustamyan V.V., Antonova I.V. Matematicheskoe opisanie metoda vrashcheniya tochki vokrug krivolinejnoj osi vtorogo poryadka [A mathematical description of the method of rotation of a point around a curvilinear axis of the second order]. *Geometriya i grafika* [Geometry and Graphics]. 2018, V. 6, I. 4, pp. 39–46. DOI: 10.12737/article_5c21f6e832b4d2.25216268. (in Russian)
3. Beloguzhev V.A. Proektivny`e sposoby` postroeniya osnovny`x parametrov krivy`x vtorogo poryadka, zadanny`x polny`m polyarny`m sootvetstviem i odnim iz ix e`lementov [Projective methods of constructing the main parameters of second-order curves given by a complete polar correspondence and one of their elements]. *Voprosy` nachertatel'noj geometrii i inzhenernoj grafiki* [Questions of descriptive geometry and engineering graphics: scientific papers]. Tashkent, FAN, 1966. I. 39, pp. 10–21.
4. Berger E.G. K sintezu mexanizmov dlya ogibaniya konicheskix sechenij metodom proektivnoj geometrii [To the synthesis of mechanisms for bending conic sections by the method of projective geometry]. *Prikladnaya geometriya i*

*inzhenernaya grafika: mezhvedomstvenny`j respublikanskij nauchn. Sb.* [Applied geometry and engineering graphics: interdepartmental Republican Scientific Collection]. Kiev, Budivel`nik, 1973. V. 16, pp. 110–113.

5. Voloshinov D.V. Ediny`j konstruktivny`j algoritm postroeniya fokusov krivy`h vtorogo poryadka [Unified constructive algorithm for constructing foci of second-order curves]. *Geometriya i grafika* [Geometry and Graphics]. 2018, V. 6, I. 2, pp. 47–54. DOI: 10.12737/article_5b559dc3551f95.26045830. (in Russian)
6. Girsh A.G. Vzaimny`e zadachi s konikami [Mutual problems with conics] / A.G. Girsh // *Geometriya i grafika* [Geometry and Graphics]. 2020, V. 8, I. 1, pp. 4–17. DOI: 10.12737/2308-4898-2020-15-24. (in Russian)
7. Hirsh A.G. Fokusy algebraicheskih krivyh [Foci of algebraic curves]. *Geometriya i grafika* [Geometry and graphics]. 2015, V. 3, I. 3, pp. 4–17. DOI: 10.12737/14415. (in Russian)
8. Grafskij O.A. Ob ustanovlenii vzaimnoj svyazi ryada i puchka vtorogo poryadka [On establishing the mutual connection of a series and a second-order beam]. *Geometriya i grafika* [Geometry and graphics]. 2016, V. 4, I. 2, pp. 8–18. DOI: 10.12737/19828. (in Russian)
9. Grafsky O.A, Ponomarchuk Yu.V., Surits V.V. Osobennosti svojstv paraboly pri ee modelirovanii [The particular properties of the parabola in its modeling]. *Geometriya i grafika* [Geometry and Graphics]. V. 6, I. 2, pp. 63–77. DOI: 10.12737/article_5b55a16b547678.01517798. (in Russian)
10. Ermakova V.A. O kasanii krivy`h 2-go poryadka [On the tangency of curves of the 2nd order]. *Kibernetika grafiki i prikladnaya geometriya poverxnostej* [Cybernetics of graphics and applied geometry of surfaces]. Trudy` instituta, V. 2. Moskow, Izd-vo MAI, 1968. pp. 77–81. (in Russian)
11. Korotkij V.A. Gomologiya dvux konicheskih sechenij [Homology of two conic sections]. *Sovershenstvovanie podgotovki uchashhixsya i studentov v oblasti grafiki, konstruirovaniya i standartizacii: mezhvuz. nauch.-metod. sb.* Saratov: SGTU, 2012, pp. 27–33. (in Russian)
12. Korotkij V.A. Graficheskie algoritmy` postroeniya kvadriki, zadannoj devyat`yu tochkami [Graphic algorithms for constructing a quadric given by nine points]. *Geometriya i grafika* [Geometry and graphics]. 2019, V. 7, I. 2, pp. 3–12. DOI: 10.12737/article_5d2c1502670779.58031440. (in Russian)
13. Korotkij V.A., Usmanova E.A. Krivy`e vtorogo poryadka v zadachah formoobrazovaniya arhitekturny`h obolochek [Second-order curves in the problems of shaping architectural shells]. *Izvestiya VUZov. Seriya «Stroitel`stvo»*. 2014. I. 9–10. pp. 101–107. (in Russian)
14. Korotkiy V.A., Usmanova E.A. Krivye vtorogo poryadka na ekrane komp'yutera [Second-Order Curves on Computer Screen]. *Geometriya i grafika* [Geometry and graphics]. 2018, V. 6, I. 2, pp. 101–113. DOI: 10.12737/2308-4898. (in Russian)
15. Korotkij V.A., Usmanova E.A. Primenenie krivy`h vtorogo poryadka dlya konstruirovaniya gladkih karkasno-setchaty`h poverhnostej [Application of second-order curves for the construction of smooth frame-mesh surfaces]. *Vestnik YuUrGU. Seriya «Stroitel`stvo i arhitektura»*. 2014, V. 14, I. 3, pp. 45–48. (in Russian)
16. Korotkij V.A. Proektivnoe sootvetstvie puchkov konicheskih sechenij [Projective correspondence of bundles of conic sections]. Informacionny`e texnologii i tehnicheskij dizajn v professional`nom obrazovanii i promy`shlennosti: sb. mater. 5-j Vseross. nauch.-prakt. konf. s mezhdunarodny`m uchastiem. Novosibirsk, NGTU Publ., 2013. pp. 49–56. (in Russian)
17. Korotkij V.A. Soprikosnovenie konik [Konik contact]. *Sovershenstvovanie podgotovki uchashhihsya i studentov v oblasti grafiki, konstruirovaniya i standartizacii: mezhvuz. nauch.-metod. sb.* Saratov, SGTU Publ., 2011. pp. 78–82. (in Russian)
18. Korotkij V.A. *Formoobrazovanie linij i poverxnostej na osnove krivy`h vtorogo poryadka v komp`yuternom geometricheskom modelirovanii: 05.01.01 «Inzhenernaya geometriya i komp`yuternaya grafika»: avtoreferat dissertacii na soiskanie uchenoj stepeni doktora tehnicheskih nauk* [Shaping of lines and surfaces based on second-order curves in computer geometric modeling: 05.01.01 "Engineering geometry and computer graphics": abstract of the dissertation for the degree of Doctor of Technical Sciences]. Nizhnij Novgorod, 2018. 38 p. (in Russian)
19. Korotkij V.A. E`llipticheskij kupol na treugol`nom ili chety`rehugol`nom fundamente [Elliptical dome on a triangular or quadrangular foundation]. *Privolzhskij nauchny`j zhurnal*. 2015, I. 1, pp. 96–102. (in Russian)
20. Sal`kov N.A. Grafo-analiticheskoe reshenie nekotory`h chastny`h zadach kvadratichnogo programmirovaniya [Graph-analytical solution of some particular problems of quadratic programming]. *Geometriya i grafika* [Geometry and graphics]. 2014, V. 2, I. 1, pp. 3–8. DOI: 10.12737/3842. (in Russian)
21. Sal'kov N.A. Prilozhenie svojstv tsiklid Dyupena k izobreteniyam [Application of Dupin Cyclide Properties to Inventions]. *Geometriya i grafika* [Geometry and graphics]. 2017, V. 5, I. 4, pp. 37–43. DOI: 10.12737/ article_5a17fd233418b2.84489740. (in Russian)
22. Sal'kov N.A. Svojstva tsiklid Dyupena i ih primenenie. Chast' 1 [Properties of Dupin cyclides and their application. Part 1]. *Geometriya i grafika* [Geometry and graphics]. 2015, V. 3, I. 1, pp. 16–28. DOI: 10.12737/10454. (in Russian)
23. Sal'kov N.A. Svojstva tsiklid Dyupena i ih primenenie. Chast' 2 [Properties of Dupin cyclides and their application. Part 2]. *Geometriya i grafika* [Geometry and graphics]. 2015, V. 3, I. 2, pp. 9–23. DOI: 10.12737/12164. (in Russian)
24. Sal'kov N.A. Svojstva ciklid Dyupena i ih primenenie. Chast' 3 [Properties of Dupin cyclides and their application. Part 3]. *Geometriya i grafika* [Geometry and graphics]. 2015, V. 3, I. 4, pp. 3–15. DOI: 10.12737/17345. (in Russian)
25. Sal'kov N.A. Svojstva tsiklid Dyupena i ih primenenie. Chast' 4 [Properties of Dupin cyclide and their application. Part 4]. *Geometriya i grafika* [Geometry and Graphics]. 2016, V. 4, I. 1, pp. 21– 33. DOI: 10.12737/18055. (in Russian)
26. Sal`kov N.A. Tsiklida Dyupena i krivy`e vtorogo poryadka. Ch. 1 [Dupin's Cyclide and second-order curves. Part 1].

Geometriya i grafika. 2016, V. 4, I 2, pp. 19–28. DOI: 10.12737/19829. (in Russian)
27. Sal'kov N.A. Tsiklida Dyupena i krivyye vtorogo poryadka. Chast' 1 [Cyclid Dupin and curves of the second order]. *Geometriya i grafika* [Geometry and graphics]. 2016, V. 4, I. 2, pp. 19–28. DOI: 10.12737/19829. (in Russian)
28. Sal'kov N. A. Ellips: kasatel'naya i normal' [Ellipse: tangent and normal]. *Geometriya i grafika* [Geometry and Graphics]. 2013, V. 1, I. 1, pp. 35–37. DOI: 10.12737/470. (in Russian)
29. Sal`kov N.A., Voloshinov D.V. *Svidetel`stvo o gosudarstvennoj registracii programmy` dlya E`VM № 2020616015 Rossijskaya Federaciya. Giperbola* [Hyperbole]: № 2020612357: zayavl. 04.03.2020: opubl. 05.06.2020; zayavitel` Federal`noe gosudarstvennoe byudzhetnoe obrazovatel`noe uchrezhdenie vy`sshego obrazovaniya «Sankt-Peterburgskij gosudarstvenny`j universitet telekommunikacij im. prof. M.A. Bonch-Bruevicha».
30. Sal`kov N.A., Voloshinov D.V. *Svidetel`stvo o gosudarstvennoj registracii programmy` dlya E`VM № 2020614640 Rossijskaya Federaciya. Parabola* [Parabola]: № 2020612401: zayavl. 04.03.2020: opubl. 20.04.2020; zayavitel` Federal`noe gosudarstvennoe byudzhetnoe obrazovatel`noe uchrezhdenie vy`sshego obrazovaniya «Sankt-Peterburgskij gosudarstvenny`j universitet telekommunikacij im. prof. M.A. Bonch-Bruevicha».
31. Sal`kov N.A., Voloshinov D.V. *Svidetel`stvo o gosudarstvennoj registracii programmy` dlya E`VM № 2020616140 Rossijskaya Federaciya. E`llips* [Ellipse]: № 2020612388: zayavl. 04.03.2020: opubl. 10.06.2020; zayavitel` Federal`noe gosudarstvennoe byudzhetnoe obrazovatel`noe uchrezhdenie vy`sshego obrazovaniya «Sankt-Peterburgskij gosudarstvenny`j universitet telekommunikacij im. prof. M.A. Bonch-Bruevicha».
32. Hejfets A.L. Koniki kak secheniya kvadrik ploskost`yu (obobshhennaya teorema Dandelena) [Tekst] / A.L. Hejfets // *Geometriya i grafika* [Geometry and graphics]. 2017. V. 5. I. 2. Pp. 45–58. (in Russian)
33. Salkov N.A. Setting of the Dupin cyclide by three straight lines and sphere Text: direct // IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Ser. 1791 (2021) 012060. doi:10.1088/1742-6596/1791/1/012060.