

УДК 510.622  
4898-2022-10-3-23-34

DOI: 10.12737/2308-

## Г.А. Щеглов

Д-р техн. наук, профессор,  
Московский государственный технический университет  
им. Н.Э. Баумана,  
Россия, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1

# О геометрической интерпретации кватернионов конусами

**Аннотация.** Рассматривается геометрическая интерпретация кватернионов, сложность визуализации которых обусловлена тем, что эти объекты имеют четыре независимых параметра. Анализ литературы показывает, что проблема геометрической интерпретации кватернионов до настоящего времени полностью не решена.

В первом разделе приводятся общие положения о кватернионах и необходимые обозначения. Во втором разделе описывается классическая геометрическая интерпретация кватернионов дугами на сфере. В третьем разделе приводится описание новой геометрической интерпретации и ее приложение к задаче конечного поворота вектора.

Представлена геометрическая интерпретация кватерниона как поверхности прямого кругового конуса, которая позволяет наглядно продемонстрировать его как целостный объект, в котором скалярная и векторная части взаимосвязаны с учетом их модулей и знаков.

Для рассмотренных примеров нормированного кватерниона наглядным становится образ важной сущности — верзора кватерниона: в общем случае это конус, который в предельном случае скаляр-кватерниона переходит в сферу, а в предельном случае вектора-кватерниона переходит в обычный вектор. Эта отличительная особенность предлагаемой геометрической интерпретации позволяет даже при проецировании на плоскость четко отличать образы кватернионов с ненулевой скалярной частью от векторов-кватернионов, что затруднительно сделать в случае дуговой интерпретации. Представление кватернионов конусами дает возможность наглядно продемонстрировать необходимость двойного кватернионного произведения при повороте вектора вокруг произвольной оси.

Образы кватернионов как конусов, сфер и векторов могут быть полезными при изучении алгебры кватернионов, которая в настоящее время находит все большее применение в технике.

**Ключевые слова:** геометрия, кватернионы, геометрическая интерпретация, произведение кватернионов, обучение.

## G.A. Shcheglov

Doctor of Engineering, Professor,  
Bauman Moscow State Technical University,  
5, 2<sup>nd</sup> Baumanskaya, Moscow, 105005, Russia

# On the Geometric Interpretation of Quaternions by Cones

**Abstract.** The geometric interpretation of quaternions is considered. The visualization complexity of quaternions is due to the fact that these objects have four independent parameters. A literature analysis shows that the problem of geometric interpretation of quaternions has not been completely solved to date.

The first section provides general provisions on quaternions and the necessary notations. The second section describes the classical geometric interpretation of quaternions by arcs on a unit

sphere. The third section describes a new geometric interpretation and its application to the problem of a vector finite rotation.

The geometric interpretation of the quaternion as the surface of a right circular cone is presented. This representation allows demonstrating it as a holistic object in which the scalar and vector parts are interconnected, taking into account their modules and signs.

For the considered normalized quaternion, it is easy to understand an important entity, the quaternion versor: in general, it is a cone, which in the limiting case of a pure scalar quaternion transform into a sphere, and in the limiting case of a pure vector quaternion transform into an ordinary vector. This distinctive feature of the proposed geometric interpretation makes it possible, even when projected onto a plane, to clearly distinguish visualization of the quaternions with a nonzero scalar part from pure vector quaternions, which is difficult to do in the other known interpretations. The representation of quaternions by cones clearly demonstrates the need for a double quaternion product, when the vector is rotated around an arbitrary axis.

Images of quaternions as cones, spheres and vectors can be useful in the study of quaternion algebra, which is currently finding increasing use in engineering.

**Keywords:** geometry, quaternions, geometric interpretation, product of quaternions, education.

**Цель работы.** Описание нового подхода к геометрической интерпретации кватернионов при помощи прямых круговых конусов.

**Задачи.** В первом разделе приводятся общие положения о кватернионах и необходимые обозначения. Во втором разделе описывается классическая геометрическая интерпретация кватернионов дугами на сфере. В третьем разделе приводится описание новой геометрической интерпретации и ее приложение к задаче конечного поворота вектора.

**Методы.** Используется математический аппарат теории кватернионов и аналитической геометрии. Геометрические построения выполнены с использованием системы компьютерной алгебры *Wolfram Mathematica*.

## Введение

В процессе обучения инженерным дисциплинам для освоения теории крайне важно обеспечить наглядность рассматриваемых абстрактных понятий [11; 18; 20]. Использование визуальной системы восприятия очень часто помогает студентам понять скрытые за математическими формулами геометрические и механические смыслы логических построений [22]. В этой связи весьма актуально использование графических методов для геометрической интерпретации математических объектов [7; 14; 26].

Кватернионы — гиперкомплексные числа, объединяющие скаляры и векторы в единой структуре

данных [30]. Известны и другие виды гиперкомплексных чисел [12; 13]. Исторически наиболее востребовано в науке и технике оказалась выросшее из теории кватернионов векторное исчисление [1]. Несмотря на доминирование векторов кватернионы не предаются забвению. Активно развивается математическая теория и ее приложения к геометрии [2; 21; 27]. На практике самым распространенным применением кватернионов является операция конечного поворота вектора на определенный угол вокруг заданной оси [33; 36]. Это обуславливает широкое применение кватернионов в кинематике твердого тела [8; 23; 34]. Пионерские исследования в области применения кватернионов в задачах ориентации твердого тела [6] позволили создать в нашей стране уникальную систему управления космическими аппаратами [5]. В силу большой вычислительной эффективности при описании вращений твердых тел и перехода между системами координат алгебра кватернионов активно используется в компьютерной графике [28; 31] и других приложениях [3; 9; 35; 38]. Помимо обычных кватернионов применяются также бикватернионы — структуры данных, состоящие из двух кватернионов, которые описывают винтовое движение твердого тела [10; 23; 37].

Рост числа приложений делает изучение кватернионов в вузах все более востребованным. Сегодня у студентов, изучающих только векторы, часто возникают вопросы: почему для этих объектов существует две различных операции умножения, но не определена операция деления? Ответ состоит в том, что векторы — это лишь составная часть более сложного объекта — кватерниона, для которого операции умножения и деления определены единственным образом. Классическое изложение теории кватернионов можно найти в одном из первых учебников [40], который рекомендуется найти в электронном виде в сети Интернет. Известны современные российские специализированные учебные пособия, посвященные данной теме [17; 19].

В процессе обучения для обеспечения наглядности и простоты освоения теории кватернионов весьма востребовано графическое представление этих гиперкомплексных чисел, имеющих вид

$$Q = s + xi + yj + zk,$$

где  $s, x, y, z$ , — четыре независимых параметра, а  $i, j, k$  — три мнимых единицы ( $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ ), имеющих специфические правила умножения [30; 40]. Однако при визуализации возникают трудности, поскольку необходимо графически представить четырёхмерный объект. Это отличает гиперкомплексные числа от обычных комплексных чисел, которые

наглядно могут быть геометрически интерпретированы как векторы на плоскости.

Сложность представления четырехмерного объекта в трехмерном пространстве [4; 15; 16], а тем более в виде проекции на плоскость экрана или иллюстрации в учебнике, порождает проблему геометрической интерпретации кватернионов, для решения которой известны различные подходы.

Классическая геометрическая интерпретация кватерниона направленными дугами большого круга [6], т.е. криволинейными векторами, связывает алгебру кватернионов и геометрию треугольников на сфере и позволяет иллюстрировать вывод сложных тригонометрических соотношений сферической тригонометрии. Однако, как будет показано ниже, данная визуализация не позволяет наглядно отобразить все особенности такой важной функции, как верзор кватерниона.

Визуализация кватернионов как суммы действительной и трех мнимых частей использует его представление как результата перекручивания тонкой ленты или ремня (англ. *belt*) [32; 39]. Такой эффект, известный в литературе как трюк с тарелкой или трюк с ремнем (англ. *belt trick*, *Dirac's string trick*), используется для иллюстрации понятия «спина» в теоретической физике [25]. Однако в данной интерпретации умножение кватернионов оказывается сложным для начинающих.

В книге [31] визуализация кватернионов проводится с использованием проекции точки, принадлежащей гиперсфере на объем шара аналогично тому, как точка на поверхности обычной сферы может быть спроецирована на большой круг (например, на круг, ограниченный экватором). Эта интерпретация, однако, весьма специфична и требует подготовки для использования. В случае практически наиболее значимого нормированного единичного кватерниона, заданного в форме верзора, данная интерпретация несколько упрощается. Рассматривается только векторная часть кватерниона, и считается, что скалярная часть легко вычисляется по тригонометрической формуле суммы квадратов синуса и косинуса угла. Таким образом, в данном методе визуализируется только часть кватерниона, что снижает ценность подхода.

В работе [29], чтобы визуализировать геометрические операции над четырехмерными векторами, вызванные умножением кватернионов, предлагаются несколько моделей. Одна модель — это массивные точки в трех измерениях, которые представляются как радиус-векторы, на конце которых отображаются точки разного размера (размер пропорционален массе). Такие векторы рассматриваются как проекции четырехмерного вектора на трехмерное пространство.

Другая модель основана на проекциях четырехмерных векторов в двух взаимно ортогональных плоскостях. Обе модели, как и описанная выше, предполагают работу с проекциями, что достаточно сложно для первоначального обучения.

В работе [24] представлен геометрический подход к умножению кватернионов, основанный на представлении пространства кватернионов в виде трехмерного пространства, которое может перемещаться вдоль некоторой выделенной оси. Рассматривая ось скалярной части как одномерную ось перемещения трехмерного векторного пространства, операция умножения кватерниона интерпретируется как перемещение, масштабирование и вращение векторного пространства. Благодаря этой интерпретации демонстрируются формулы вращения кватернионов и производная от кватернионов. Данное представление достаточно наглядно, однако приводит к «анизотропии» пространства, поскольку здесь выделяется особое направление для отображения четвертого измерения. В результате у неподготовленного студента может сложиться неверное представление о свойствах кватерниона.

Таким образом, анализ литературы показывает, что проблема геометрической интерпретации кватернионов до настоящего времени полностью не решена.

### 1. Кватернион как отношение между векторами в пространстве

Обозначим кватернион буквой в квадратных скобках:  $[K]$ . Скалярную часть кватерниона будем обозначать буквой без скобок как обычный скаляр, а векторную часть будем обозначать выражением в фигурных скобках

$$[K] = [s, \{x, y, z\}].$$

Кватернион с нулевой скалярной частью будем называть вектор-кватернионом и обозначать выражением в фигурных скобках:

$$\{r\} = [0, \{x, y, z\}].$$

Полужирными буквами, например  $r$ , будем обозначать обычные векторы. Отличать векторы от векторов-кватернионов необходимо, поскольку для векторов операция деления  $\frac{a}{b}$  не определена, а для векторов-кватернионов деление задано как умножение на обратный (сопряженный) кватернион:

$$\frac{\{a\}}{\{b\}} = \{a\} \circ \{b\}^{-1} = [K],$$

где операция  $\{b\}^{-1}$  означает сопряженный кватернион с отрицательной векторной частью [6; 17; 19; 40]. То есть для анализа отношения двух векторных величин их надо определить как векторы-кватернионы.

Величиной, аналогичной модулю вектора, является тензор кватерниона

$$T = \sqrt{s^2 + x^2 + y^2 + z^2}.$$

Нормированный кватернион, который чаще всего используется на практике в задачах вращения и ориентации твердого тела, имеет единичный тензор. Нормировка кватерниона получается делением его компонентов на тензор

$$[Q] = \left[ \frac{s}{T}, \left\{ \frac{x}{T}, \frac{y}{T}, \frac{z}{T} \right\} \right].$$

Результат может быть параметризован с использованием тригонометрических функций некоторого характерного угла  $\varphi$  и единичного направляющего вектора  $e$

$$\cos \varphi = \frac{s}{T}; \quad \sin \varphi = \frac{1}{T} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

в форме верзора

$$[Q] = [\cos \varphi, \{\sin \varphi e\}].$$

Таким образом, любой кватернион может быть представлен как произведение тензора и верзора  $[K] = T \cdot [Q]$ .

Если рассматривать только единичные векторы-кватернионы  $\{a\}$  и  $\{b\}$ , то их отношение даст верзор

$$\frac{\{a\}}{\{b\}} = \{a\} \circ \{b\}^{-1} = [Q] = [\cos \varphi, \{\sin \varphi e\}], \quad (1)$$

где  $e$  — единичный вектор нормали к плоскости, образованной векторами  $a$  и  $b$ , направление которого задано так, чтобы поворот от вектора  $b$  к вектору  $a$  происходил против часовой стрелки (нормаль может быть найдена путем векторного произведения  $a \times b$ ),  $\varphi$  — угол между векторами, который может быть найден путем скалярного произведения  $(a, b)$ .

Таким образом геометрическая интерпретация отношения единичных вектор-кватернионов  $\{a\} \circ \{b\}^{-1}$ , а следовательно, и нормированного кватерниона (1) — это поворот вектора  $b$  вокруг оси  $e$  на угол  $\varphi$ , в результате чего получается новый вектор  $a$ . Геометрическая интерпретация показана на рис. 1. Отсюда следует, что в случае, когда ось вращения  $e$  перпендикулярна начальному положению вектор-кватерниона  $\{v_{old}\}$ , произведение вектор-кватерниона на кватернион

поворота справа (произведение кватернионов не-коммутативно) задает поворот вектора на угол  $\varphi$ . Новое положение повернутого вектор-кватерниона при условии, что  $(\mathbf{e}, \mathbf{v}_{old}) = 0$  находится по формуле

$$\{\mathbf{v}_{new}\} = [\cos \varphi, \{\sin \varphi \mathbf{e}\}] \circ \{\mathbf{v}_{old}\}.$$

Этот же конечный поворот можно получить умножением вектора на сопряженный кватернион слева

$$\begin{aligned} \{\mathbf{v}_{new}\} &= \{\mathbf{v}_{old}\} \circ [\cos \varphi, \{\sin \varphi \mathbf{e}\}]^{-1} = \\ &= \{\mathbf{v}_{old}\} \circ [\cos \varphi, \{-\sin \varphi \mathbf{e}\}]. \end{aligned}$$

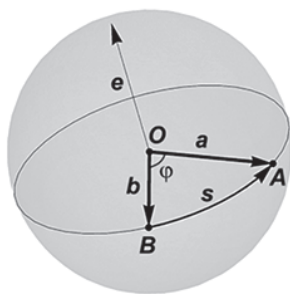


Рис. 1. Интерпретации кватерниона как результата деления векторов-кватернионов  $\{\mathbf{a}\} \circ \{\mathbf{b}\}^{-1}$  в виде дуги большого круга  $s = \widehat{BA}$

В случае, когда векторы  $\mathbf{e}, \mathbf{v}_{old}$  неортогональны, для поворота вектора необходимо применять двойное кватернионное произведение, т.е. вместо одного конечного поворота рассматривать два последовательных конечных поворота на половину необходимого угла

$$\{\mathbf{v}_{new}\} = \left[ \cos \frac{\varphi}{2}, \left\{ \sin \frac{\varphi}{2} \mathbf{e} \right\} \right] \circ \{\mathbf{v}_{old}\} \circ \left[ \cos \frac{\varphi}{2}, \left\{ \sin \frac{\varphi}{2} \mathbf{e} \right\} \right]^{-1}.$$

Понять, почему в общем случае необходимо делить поворот вектора на два полуповорота, в процессе обучения помогает геометрическая интерпретация кватерниона. В англоязычной литературе у этой темы имеется специальное название *Understanding quaternions* [29; 39].

## 2. Представление кватерниона дугой большого круга на сфере

Рассмотрим классическую геометрическую интерпретацию нормированного кватерниона (1) как скользящего криволинейного вектора  $\mathbf{s}$ , корадимального заданной дуге большого круга [6, с. 22]. Такую интерпретацию, показанную на рис. 1, далее будем называть дуговой. В соответствии с ней единичный

вектор-кватернион  $\{\mathbf{v}\}$  — это дуга, равная четверти большого круга, т.е. имеющая длину  $\pi/2$ . Это можно легко проверить, рассмотрев выражение, дающее нулевую скалярную часть для верзора кватерниона

$$\{\mathbf{v}\} = [\cos(\pi/2), \{\sin(\pi/2)\mathbf{v}\}] = [0, \{\mathbf{v}\}]. \quad (2)$$

Выражение (2) показывает также, что любой нормированный кватернион с ненулевой скалярной частью будет отображаться на сфере дугой большого круга, длина которой не равна  $\pi/2$  (т.е. больше или меньше четверти большого круга). Разумеется, вектор-кватернион соответствует также дугам длиной

$$\frac{\pi}{2} + \pi n, n = 0, 1, \dots,$$

например, дуге в три четверти большого круга (т.е. длиной  $3\pi/2$ ), но эти случаи всегда можно представить через (2).

Произведению кватернионов соответствует операция сложения дуг на сфере [6, с. 22]. Пусть даны единичные кватернионы, заданные как отношение единичных вектор-кватернионов  $[\wedge] = \{\mathbf{b}\} \circ \{\mathbf{a}\}^{-1}$  и  $[M] = \{\mathbf{a}\} \circ \{\mathbf{c}\}^{-1}$ , их произведение дает единичный кватернион

$$[N] = [\wedge] \circ [M] = \{\mathbf{b}\} \circ \{\mathbf{a}\}^{-1} \circ \{\mathbf{a}\} \circ \{\mathbf{c}\}^{-1} = \{\mathbf{b}\} \circ \{\mathbf{c}\}^{-1}.$$

Обобщая, получается правило: «Векторная сумма нескольких дуг больших кругов, каждая из которых задается кватернионом, дает дугу большого круга, определяемую произведением этих кватернионов в обратном порядке» [6, с. 24].

Используя дуговую геометрическую интерпретацию поворот произвольного вектор-кватерниона  $\{\mathbf{v}\}$  в новое положение  $\{\mathbf{w}\}$  вокруг оси  $\mathbf{e}$  на угол  $\varphi$ , определяемый преобразующим кватернионом

$$[Q] = \{\mathbf{b}\} \circ \{\mathbf{a}\}^{-1} \quad (3)$$

с помощью двойного кватернионного произведения

$$\{\mathbf{w}\} = [Q] \circ \{\mathbf{v}\} \circ [Q]^{-1}, \quad (4)$$

можно представить как два треугольника на сфере, как показано на рис. 2.

Вектор-кватерниону  $\{\mathbf{v}\}$  на рис. 2 соответствует дуга  $\widehat{AB}$ , равная четверти большого круга, плоскость которого  $AOB$  перпендикулярна вектору  $\mathbf{v}$ .

Преобразующий кватернион  $[Q]$  в общем случае имеет ненулевую скалярную часть. Длина дуги, отображающей на сфере такой кватернион, будет либо больше, либо меньше четверти большого круга. На рис. 2 преобразующий кватернион показан дугой



$\widehat{BC}$ . Этот кватернион получается, согласно (3), как отношение векторов-кватернионов

$$[Q] = \{\overline{OC}\} \circ \{\overline{OB}\}^{-1}. \quad (5)$$

В рассматриваемом примере взят угол  $\angle BOC = \varphi/2 < \pi/2$  и длина дуги  $\widehat{BC}$ , соответственно, меньше четверти большого круга.

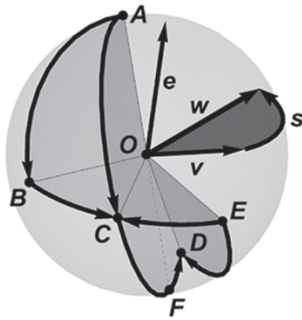


Рис. 2. Дуговая геометрическая интерпретация операции поворота вектора с использованием двойного произведения кватернионов

Первое произведение кватернионов дает промежуточный кватернион

$$[R] = [Q] \circ \{v\},$$

отображаемый на рис. 2 в виде суммы дуг, в которой слагаемые взяты в обратном порядке

$$\widehat{AC} = \widehat{AB} + \widehat{BC}.$$

Следует обратить внимание на то, что, поскольку угол между плоскостями больших кругов  $AOB$  и  $BOC$  в рассматриваемом примере взят большим  $\pi/2$ , длина суммарной дуги увеличивается, т.е.  $\widehat{AC} > \frac{\pi}{2}$ . Это

свидетельствует о том, что промежуточный кватернион  $[R]$  перестает быть вектором-кватернионом и имеет ненулевую скалярную часть. Векторная часть промежуточного кватерниона  $[R]$  поворачивается от исходного вектора  $\{v\}$  вокруг оси  $e$  на угол  $\varphi/2$ .

Таким образом, первое произведение кватернионов задает первый полуповорот как преобразование «вектор-кватернион  $\rightarrow$  кватернион».

Смысл второго кватернионного произведения

$$\{w\} = [R] \circ [Q]^{-1}$$

состоит в том, чтобы в процессе полуповорота на угол  $\varphi/2$  обнулить скалярную часть результирующего кватерниона, т.е. осуществить обратное преобразование

«кватернион  $\rightarrow$  вектор-кватернион».

На рис. 2 второй полуповорот задан суммой дуг

$$\widehat{ED} = \widehat{EC} + \widehat{CD},$$

где дуга  $\widehat{CD}$  есть скользящая дуга промежуточного кватерниона  $\widehat{AC}$ , перемещенная вдоль большого круга так, чтобы точка  $A$  совпала с точкой  $C$ , а дуга  $\widehat{EC}$  отображает сопряженный кватернион  $[Q]^{-1}$ . Чтобы получить эту дугу, скользящая дуга  $\widehat{AB}$  преобразующего кватерниона переносится вдоль большого круга в дугу  $\widehat{CE}$ , а операция сопряжения соответствует изменению направления дуги

$$\widehat{EC} = [\widehat{CE}]^{-1}.$$

Дуга  $\widehat{ED}$ , интерпретирующая результирующий вектор-кватернион  $\{w\}$  равна четверти большого круга, т.е. имеет длину  $\pi/2$ . К сожалению, на рис. 2 этот факт может быть трудно заметить, и в этом состоит низкая наглядность дуговой интерпретации кватернионов.

В целом дуговая геометрическая интерпретация позволяет представить, почему необходимо использовать два кватернионных произведения для поворота вектора на угол  $\varphi$  в случае, когда поворачиваемый вектор не перпендикулярен оси вращения: первый полуповорот на угол  $\varphi/2$  порождает ненулевую скалярную часть промежуточного кватерниона, которая обнуляется при втором полуповороте на угол  $\varphi/2$ . То есть конечный поворот Эйлера в кватернионах — это двойной переход:

«вектор-кватернион  $\rightarrow$  кватернион  $\rightarrow$  вектор-кватернион».

Рассмотренный пример показывает, что для геометрического представления весьма важным оказывается отображение скалярной части кватернионов. Использование дуговой интерпретации требует создания таких чертежей, где можно четко идентифицировать дугу длиной ровно в четверть большого круга. На рисунке или на плоскости экрана в проекции это весьма трудно отобразить. Например, на рис. 2 то, что дуга  $\widehat{CD}$  больше четверти большого круга, можно понять только при помощи вспомогательной точки  $F$ , лежащей на диаметре сферы  $AF$ . Таким образом, требуется более наглядная геометрическая интерпретация кватерниона, отражающая не только его четырехмерную природу, но и взаимосвязь скалярного и векторного компонентов, которая определяется его верзором.

### 3. Геометрическая интерпретация кватерниона конусом

Векторы представляют собой одномерные, протяженные в пространстве, геометрические элементы —

направленные отрезки прямых. Для отображения в пространстве четырехмерного объекта, включающего скаляр и вектор, необходимо добавить еще один четко идентифицируемый параметр. В рассмотренной выше интерпретации кватерниона используется протяженный криволинейный объект: дуга большого круга единичного радиуса, у которой, помимо трех параметров — компонент вектора нормали, определяющих ориентацию плоскости большого круга, четвертым параметром становится угол дуги (см. рис. 1).

Однако можно рассмотреть и другую интерпретацию. Известно, что уравнение конуса с вершиной в начале координат имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2},$$

где в правой части стоит квадрат той переменной, координатная ось которой является осью симметрии конуса. В данном примере — это ось аппликат.

Прямой круговой конус получается при равенстве параметров  $a = b$ . Вводя радиус основания конуса  $r^2 = x^2 + y^2$  получим уравнение

$$\frac{r^2}{a^2} = \frac{z^2}{c^2}, \quad (6)$$

откуда следует уравнение образующей конуса как уравнение прямой, выходящей из начала координат с углом наклона  $\varphi$

$$z = \pm \frac{c}{a} r = r \operatorname{tg} \varphi. \quad (7)$$

Можно показать, что при фиксированной высоте конуса  $z = h = \text{const}$  окружность его основания  $r = h \operatorname{ctg} \varphi$  является малым кругом сферы с центром в начале координат и радиусом

$$R^2 = h^2 + r^2 = h^2 / \sin^2 \varphi. \quad (8)$$

Вводя теперь переменную  $s$  как скалярную часть кватерниона и переменную  $v$  как параметр его векторной части

$$[K] = [s, \{v\mathbf{e}\}],$$

где  $s = T \cdot \cos \varphi$  и  $v = T \cdot \sin \varphi$  и относим квадраты этих переменных после преобразования, получим уравнение конуса, аналогичное (6)

$$\frac{v^2}{\sin^2 \varphi} = \frac{s^2}{\cos^2 \varphi},$$

откуда получается уравнение образующей конуса, идентичное, с точностью до обозначения переменных, уравнению (7).

В соответствии с описанной аналогией в данной работе предлагается использовать для отображения кватерниона боковую поверхность прямого кругового конуса, где три измерения задают его высоту, а в качестве четвертого измерения предлагается использовать характерный размер — радиус основания.

Например, как показано на рис. 3, нормированный кватернион  $[Q]$ , являющийся отношением единичных векторов-кватернионов  $\overline{OB}$  к  $\overline{OA}$

$$[Q] = \{\overline{OB}\} \circ \{\overline{OA}\}^{-1}$$

с углом между векторами  $\angle AOB = \varphi$ , может быть представлен как конус с высотой  $OC$ , радиусом основания  $CD$  и образующей  $OD$ . Кватерниону соответствует боковая поверхность конуса, поскольку ориентация плоскости  $OCD$  относительно оси  $\overline{OC}$  не определена.

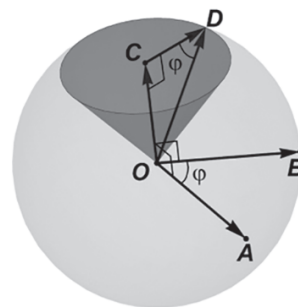


Рис. 3. Геометрическая интерпретация кватерниона общего вида конусом

Такая новая интерпретация позволяет отразить все особенности верзора данного кватерниона

$$[Q] = [\cos \varphi, \{\sin \varphi \mathbf{e}\}].$$

Скалярная часть — это длина радиуса основания конуса  $|CD| = |\cos \varphi|$ .

Векторная часть — это высота конуса  $\overline{OC} = \sin \varphi \mathbf{e}$ , причем  $|OC| = |\sin \varphi|$ , а направляющий вектор  $\mathbf{e}$  ортогонален плоскости  $AOB$  и ориентирован так, что при взгляде с конца вектора поворот от  $\overline{OA}$  к  $\overline{OB}$  происходит против часовой стрелки.

Треугольник  $OCD$  является прямоугольным (угол при вершине  $C$  — прямой), причем угол при основании равен  $\angle CDO = \varphi$ , а длина образующей конуса отображает тензор кватерниона, который для нормированного кватерниона равен единице

$$|OD| = T = \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1.$$

Таким образом точка  $D$ , принадлежащая окружности основания конуса, лежит на малом круге единичной сферы, плоскость которого (т.е. плоскость основания конуса) параллельна плоскости  $AOB$ .

Знаки скалярной и векторной частей кватерниона могут быть отображены путем задания направления отрезкам  $CD$  и  $OC$ . На рис. 4 показаны два кватерниона с положительной векторной частью и разными знаками скалярной части. Эти конусы равны по размерам, их высоты равны и коллинеарны, т.е. векторы  $\overrightarrow{OC}$  и  $\overrightarrow{FO}$  равны. Направление векторов  $\overrightarrow{CD}$  и  $\overrightarrow{EF}$  противоположно: в случае кватерниона с положительной скалярной частью начало вектора  $\overrightarrow{OC}$  совпадает с точкой  $O$ , а в случае кватерниона с отрицательной скалярной частью вектор  $\overrightarrow{FO}$  расположен так, что с точкой  $O$  совпадает его конец. Таким образом, если при выбранной интерпретации кватерниона его векторная часть направлена в сторону вершины конуса, то скалярная часть его отрицательна, а если в сторону основания — то скалярная часть его положительна.

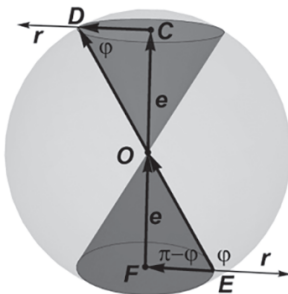


Рис. 4. Геометрические интерпретации кватерниона с разными знаками скалярной части: конус  $OCD$  — кватернион с положительной скалярной частью; конус  $OFE$  — кватернион с отрицательной скалярной частью

Такая интерпретация знака скалярной части естественным образом показывает величину угла верзора. Для положительной скалярной части этот угол острый, т.е. угол  $\varphi = \angle CDO$ , а для отрицательной — этот угол тупой, т.е.  $\varphi = \pi - \angle FEO$ . Знак скалярной части может быть вычислен как знак скалярного произведения вектора скалярной части и коллинеарного с ним единичного орта  $\mathbf{r}$ , направленного из центра малого круга (см. рис. 4). Примеры вычисления знаков:

$$z_{CD} = \text{sign}(\overrightarrow{CD}, \mathbf{r}) = 1,$$

$$z_{EF} = \text{sign}(\overrightarrow{EF}, \mathbf{r}) = -1.$$

Предельное состояние  $\varphi = 0$  показано на рис. 5, а, а другое предельное состояние  $\varphi = \pi$  показано на рис. 5, б. Кватернион с нулевой векторной частью будет соответствовать конусу с нулевой высотой

$$|OC| = \sin 0 = \sin \pi = 0.$$

Основание такого вырожденного конуса — это дуга большого круга. Однако, поскольку в этом случае ориентация плоскости большого круга не определена (так как длина вектора  $\mathbf{e}$  нулевая), геометрической интерпретацией такого кватерниона-скаляра следует считать поверхность сферы, как показано на рис. 5.

Как описано выше, знак скалярной части отображается направлением отрезка радиуса сферы: у положительного кватерниона-скаляра радиус направлен от центра к поверхности  $z_{CD} \cdot |CD| = \cos 0 = 1$  (см. рис. 5, а), а у отрицательного, наоборот, — к центру  $z_{CD} \cdot |CD| = \cos \pi = -1$  (см. рис. 5, б).

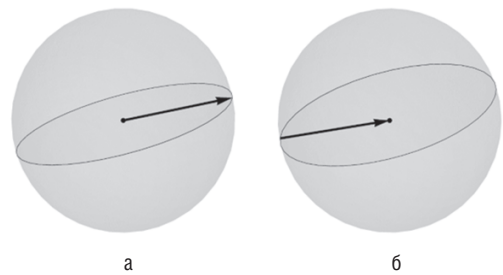


Рис. 5. Геометрическая интерпретация кватерниона-скаляра сферой: а — положительный кватернион-скаляр; б — отрицательный кватернион-скаляр

Отрицательный знак векторной части кватерниона означает смену его направления на противоположное. Это продемонстрировано на рис. 6, где показан сопряженный кватернион

$$[Q]^{-1} = [\cos \varphi, -\{\sin \varphi \mathbf{e}\}].$$

Сравнение с рис. 4 показывает, что в данном случае векторы на оси конусов  $\overrightarrow{OC}$  и  $\overrightarrow{OF}$  коллинеарны, равны по модулю, но противоположны.

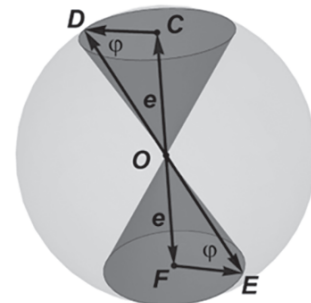


Рис. 6. Геометрическая интерпретация кватерниона и сопряженного кватерниона: конус  $OCD$  — кватернион с положительной скалярной частью; конус  $EFO$  — кватернион, сопряженный кватерниону  $OCD$

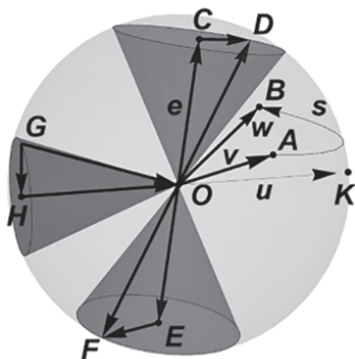
Предельный случай — вектор-кватернион (кватернион с нулевой скалярной частью) будет отображен как обычный вектор,

$$\overrightarrow{OC} = \sin\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)\mathbf{e},$$

поскольку у соответствующего конуса радиус основания равен нулю

$$|CD| = \cos\left(\pm \frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

С использованием предложенной интерпретации кватерниона можно отобразить операцию поворота вектора (4), как показано на рис. 7, где производящий кватернион  $[Q]$  показан конусом  $OCD$ , промежуточный кватернион  $[R]$  — конусом  $OHG$ , кватернион  $[Q]^{-1}$ , сопряженный производящему — конусом  $OEF$ .



**Рис. 7.** Геометрическая интерпретация поворота вектора

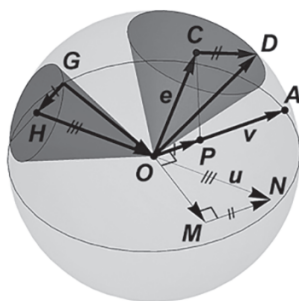
Рассмотренный выше переход

«вектор-кватернион  $\rightarrow$  кватернион  $\rightarrow$   
 $\rightarrow$  вектор-кватернион»

на рис. 7 представляется как

«вектор  $OA \rightarrow$  конус  $OHG \rightarrow$  вектор  $OB$ ».

Параметры промежуточного кватерниона  $[R]$  могут быть получены путем геометрических построений в плоскости  $MOA$ , образованной исходным вектором  $\mathbf{r} = \overline{OA}$  и вектором  $\overline{OM} = \overline{OC} \times \overline{OA}$ , как показано на рис. 8. Равные отрезки отмечены на рис. 8 одинаковым количеством штрихов.



**Рис. 8.** Геометрическая интерпретация первого поворота вектора

Как показано на рис. 7, скалярную и векторную часть промежуточного кватерниона составляют величина  $z_{GH} \cdot |\overrightarrow{GH}|$  и вектор  $\overrightarrow{HO}$

$$\begin{aligned} [R] &= [Q] \circ \{v\} = \left[ z_{CD} \overline{CD}, \{ \overline{OC} \} \right] \circ \left[ 0, \{ \overline{OA} \} \right] = \\ &= \left[ z_{GH} \overline{GH}, \{ \overline{HO} \} \right]. \end{aligned}$$

По правилу произведения кватернионов

$$[R] = \left[ 0 \cdot z_{CD} |\overline{CD}| - (\overline{OC}, \overline{OA}), \{0 \cdot \overline{OC} + z_{CD} |\overline{CD}| \cdot \overline{OA} + \overline{OC} \times \overline{OA} \} \right]$$

получаем, что

$$\begin{aligned} |\overline{GH}| &= |(\overline{OC}, \overline{OA})| \\ z_{GH} &= -\text{sign}(\overline{OC}, \overline{OA}) \\ \overline{HO} &= z_{CD} |\overline{CD}| \cdot \overline{OA} + \overline{OM}. \end{aligned}$$

Скалярному произведению  $(\overline{OC}, \overline{OA})$  соответствует проекция вектора  $\overline{OC}$  на единичный вектор  $\overline{OA}$  т.е.  $|\overline{OP}| \cos \angle AOC$ . Однако скалярную часть можно определить по построению, поскольку вектор  $\overline{GH}$  — это радиус малого круга единичной сферы, образованного пересечением сферы с плоскостью, перпендикулярной вектору  $\overline{HO}$  и проходящей через его начало — точку  $H$ .

Таким образом, определение параметров промежуточного кватерниона сводится к следующему алгоритму:

- 1) определение вектора  $\overline{OM} = \overline{OC} \times \overline{OA}$  и плоскости  $MOA$ ;
  - 2) определение вектора  $\overline{MN} = z_{CD} \cdot |\overline{CD}| \cdot \overline{OA}$ ;
  - 3) построение векторной суммы  $\overline{ON} = \overline{OM} + \overline{MN}$  (все векторы лежат в плоскости  $MOA$ );
  - 4) построение вектора  $\overline{HO}$  путем скольжения вектора  $\overline{ON}$  до совпадения точки  $N$  с центром сферы  $O$ ;
  - 5) построение в плоскости  $MOA$  большого круга с центром в точке  $O$ , проходящего через точку  $A$ ;
  - 6) определение вектора  $\overline{GH}$  путем построения в плоскости  $MOA$  перпендикуляра к отрезку  $HO$  из точки  $H$  до пересечения с большим кругом в точке  $G$ .
- Из описанных построений следует, что скалярная часть промежуточного кватерниона получается отличной от нуля, поскольку

$$|u| = |\overrightarrow{ON}| = |\overrightarrow{OH}| < 1,$$

и точка  $H$  лежит внутри большого круга, что дает ненулевой радиус соответствующего малого круга.



Аналогичные построения для произведения кватернионов, соответствующего второму полуповороту, показывают, почему в данном случае получается вектор-кватернион с нулевой скалярной частью. Как показано на рис. 9, векторную часть вектора-кватерниона  $\{w\}$  составляет вектор  $\overline{OB}$

$$\begin{aligned}\{w\} &= [R] \circ [Q]^{-1} = [z_{GH} \overline{GH}, \{HO\}] \circ \\ &\circ [z_{EF} \overline{EF}, \{OE\}] = [0, \overline{OB}].\end{aligned}$$

По правилу произведения кватернионов скалярная часть  $\{w\}$  определяется выражением, которое должно давать ноль

$$z_{GH} \overline{GH} \cdot z_{EF} \overline{EF} - (\overline{HO}, \overline{OE}) = 0,$$

а векторная часть равна

$$\{\overline{OB}\} = \{z_{GH} \overline{GH} \cdot \overline{OE} + z_{EF} \overline{EF} \cdot \overline{HO} + \overline{HO} \times \overline{OE}\}.$$

Как и в предыдущем случае здесь достаточно графически представить только выражение для векторной части кватерниона. Как показано на рис. 9, вектор  $\overline{OB}$  — это сумма векторов

$$\overline{OS} = \overline{HO} \times \overline{OE}, \overline{SY} = z_{GH} \overline{GH} \cdot \overline{OE}, \overline{SZ} = z_{EF} \overline{EF} \cdot \overline{HO},$$

которая дает единичный вектор, поскольку точка  $B$  лежит на большом круге единичной сферы, а следовательно, радиус малого круга будет равен нулю, что соответствует нулевой скалярной части кватерниона.

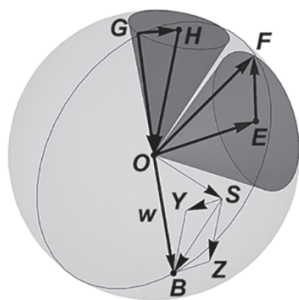


Рис. 9. Геометрическая интерпретация второго полуповорота вектора

Аналогичным образом можно найти произведение нормированных кватернионов в общем случае: прежде всего, следует построить векторную часть

этого произведения, а затем — соответствующий малый круг сферы. При работе с кватернионами общего вида необходимо также учитывать их тензоры как соответствующие масштабные коэффициенты.

## Выводы

Представленная геометрическая интерпретация кватерниона поверхностью конуса позволяет наглядно продемонстрировать его как целостный объект, в котором скалярная и векторная части взаимосвязаны с учетом их модулей и знаков. Эти взаимосвязи важны для понимания кватерниона общего вида как отношения двух векторов-кватернионов, т.е., по сути, двух векторных величин.

Для рассмотренных примеров нормированного кватерниона наглядным становится образ важной сущности — верзора кватерниона: в общем случае — это конус, который в предельном случае скаляр-кватерниона переходит в сферу, а в предельном случае вектора-кватерниона переходит в обычный вектор.

Эта отличительная особенность предлагаемой геометрической интерпретации позволяет даже при проецировании на плоскость четко отличать образы кватернионов с ненулевой скалярной частью от векторов-кватернионов, что затруднительно сделать в случае дуговой интерпретации. Представление кватернионов конусами более наглядно продемонстрировать необходимость двойного кватернионного произведения, при повороте вектора вокруг произвольной оси, чем в случае использования представления кватернионов дугами больших кругов единичной сферы. Важно, что обе указанных интерпретации могут использоваться совместно, дополняя друг друга. В отличие от других интерпретаций, здесь не требуется оперировать сложными геометрическими образами (проекциями гиперболы, перекручиванием ремня) или вводить какие-либо искусственно выделенные направления в пространстве.

Образы кватернионов как конусов, сфер и векторов могут быть полезными как при изучении алгебры кватернионов, которая в настоящее время находит все большее применение в технике, а также при визуализации результатов моделирования динамики сложных аэроупругих и аэроавтотупругих систем.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-08-01076А.

## Литература

1. Александрова Н.В. Из истории векторного исчисления [Текст] / Н.В. Александрова. — М.: URSS, 2022. — 272 с.

2. Арнольд В.И. Геометрия комплексных чисел, кватернионов и спинов: учеб. пособие [Текст] / В.И. Арнольд. — М.: Изд-во МЦНМО, 2013. — 40 с.

3. *Безменов В.М.* Применение кватернионов в фотограмметрии [Текст] / В.М. Безменов // Известия высших учебных заведений. Геодезия и аэрофотосъемка. — 2014. — № 5. — С. 22–27.
4. *Бойков А.А.* О построении моделей объектов пространства четырех и более измерений в учебном процессе [Текст] / А.А. Бойков // Геометрия и графика. — 2018. — Т. 6. — № 4. — С. 54–71. — DOI: 0.12737/article\_5c21f96dce5de8.36096061.
5. *Бранец В.Н.* Записки инженера [Текст] / В.Н. Бранец. — М.: РТСофт-Космоскоп, 2018. — 592 с.
6. *Бранец В.Н.* Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела [Текст] / В.Н. Бранец, И.П. Шмыглевский. — М.: Наука, 1973. — 320 с.
7. *Волошинов Д.В.* Алгоритмический комплекс для решения задач с квадратами с применением мнимых геометрических образов [Текст] / Д.В. Волошинов // Геометрия и графика. — 2020. — Т. 8. — № 2. — С. 3–32. — DOI: 10.12737/2308-4898-2020-3-32.
8. *Голубев Ю.Ф.* Алгебра кватернионов в кинематике твердого тела [Текст] / Ю.Ф. Голубев // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. — 2013. — № 39. — 23 с.
9. *Гордеев В.Н.* Кватернионы и бикватернионы с приложениями в геометрии и механике [Текст] / В.Н. Гордеев. — Киев: Сталь, 2016. — 316 с.
10. *Диментберг Ф.М.* Теория винтов и ее приложения [Текст] / Ф.М. Диментберг. — М.: Наука, 1978. — 328 с.
11. *Игнатьев С.А.* Повышение наглядности представления изучаемых в начертательной геометрии объектов [Текст] / С.А. Игнатьев, Э.Х. Муратбаев, М.В. Воронина // Геометрия и графика. — 2022. — Т. 10. — № 1. — С. 44–53. DOI: 10.12737/2308-4898-2022-10-1-44-53.
12. *Кантор И.Л.* Гиперкомплексные числа [Текст] / И.Л. Кантор, А.С. Солодовников. — М.: Наука, 1973. — 144 с.
13. *Конвей Дж.Х.* О кватернионах и октавах, об их геометрии, арифметике и симметриях [Текст] / Дж.Х. Конвей, Д.А. Смит. — М.: Изд-во МЦНМО, 2009. — 183 с.
14. *Короткий В.А.* Геометрическое моделирование поверхности посредством ее отображения на четырехмерное пространство [Текст] / В.А. Короткий // Омский научный вестник. — 2015. — № 137. — С. 8–12.
15. *Левкин Ю.С.* Шестимерная эпюрная номограмма в четырехоктантовом измерении [Текст] / Ю.С. Левкин // Геометрия и графика. — 2018. — Т. 6. — № 1. — С. 39–47. — DOI: 10.12737/article\_5ad098b05f1559.36303938.
16. *Ляшков А.А.* Особенность отображения гиперповерхности четырехмерного пространства [Текст] / А.А. Ляшков, К.Л. Панчук, Л.Г. Варепко // Геометрия и графика. — 2017. — Т. 5. — № 3. — С. 3–10. — DOI: 10.12737/article\_59bfa3078af4c1.45321238.
17. *Мисюра Н.Е.* Кватернионные модели в кинематике и динамике твердого тела. Учебное пособие [Текст] / Н.Е. Мисюра, Е.А. Митюшов. — Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2020. — 120 с.
18. *Назарова О.Н.* Анализ некоторых задач курса теоретической механики, решаемых методами начертательной геометрии [Текст] / О.Н. Назарова // Геометрия и графика. — 2019. — Т. 7. — № 4. — С. 76–83. — DOI: 10.12737/2308-4898-2020-76-83.
19. *Полякова Н.С.* Кватернионы и их применение: метод. указания [Текст] / Н.С. Полякова, Г.С. Дерябина. — М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2003. — 54 с.
20. *Савельев Ю.А., Черкасова Е.Ю.* Вычислительная графика в решении нетрадиционных инженерных задач [Текст] / Ю.А. Савельев, Е.Ю. Черкасова // Геометрия и графика. — 2020. — Т. 8. — № 1. — С. 33–44. — DOI: 10.12737/2308-4898-2020-33-44.
21. *Садбери Э.* Кватернионный анализ [Текст] / Э. Садбери // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. — 2004. — Т. 1. — № 2-2. — С. 130–157.
22. *Серегин В.И.* Междисциплинарные связи начертательной геометрии и смежных разделов высшей математики [Текст] / В.И. Серегин, Г.С. Иванов, И.М. Дмитриева, К.А. Муравьев // Геометрия и графика. — 2013. — Т. 1. — № 3-4. — С. 8–12. — DOI: 10.12737/2124.
23. *Челноков Ю.Н.* Кватернионные и бикватернионные модели и методы механики твердого тела и их приложения. Геометрия и кинематика движения [Текст] / Ю.Н. Челноков. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. — 512 с.
24. *Baek J., Jean H., Kim G., Han S.* Visualizing quaternion multiplication. IEEE Access, 2017. V. 5. Pp. 8948–8955. DOI: 10.1109/ACCESS.2017.2705196
25. *Bolker E.D.* The Spinor Spanner. The American Mathematical Monthly. 1973, V. 80, I. 9. Pp. 977–984. DOI: 10.2307/2318771.
26. *Boykov A.A.* Development and application of the geometry constructions language to building computer geometric models // Journal of Physics: Conference Series. 2021. V. 1901 (012058). Pp. 1–8. DOI: 10.1088/1742-6596/1901/1/012058.
27. *Demirci B.B., Aghayev N.* On geometric applications of quaternions. Turkish Journal of Mathematics, 2020, V. 44. I. 4, Article 15, 16 p. DOI: 10.3906/mat-1907-120.
28. *Goldman R.* An Integrated Introduction to Computer Graphics and Geometric Modeling. CRC Press, 2009, 574 p.
29. *Goldman R.* Understanding quaternions. Graph. Models, 2011. V. 73. I. 2. Pp. 21–49. DOI: 10.1016/j.gmod.2010.10.004.
30. *Hamilton W.R.* Elements of quaternions. London, Longmans Green, 1866. 762 p.
31. *Hanson A.J.* Visualizing Quaternions. Elsevier: Morgan Kaufmann, 2006, 536 p.
32. *Hart J.C., Francis G.K., Kauffman L.H.* Visualizing quaternion rotation. ACM Trans. Graph., 1994. V. 13. I. 3. Pp. 256–276. DOI: 10.1145/195784.197480.
33. *Hitzer E.* The orthogonal planes split of quaternions and its relation to quaternion geometry of rotations. Journal of Physics: Conference Series, 2015. I. 597, Paper ID 012042. 11 p. DOI: 10.1088/1742-6596/597/1/012042.
34. *Kuipers J.B.* Quaternions and Rotation Sequences: A Primer with Applications to Orbits, Aerospace and Virtual Reality. Princeton University Press, 2002. 400 p.

35. Malonek H.R. Quaternions in Applied Sciences. Bauhaus-Universität Weimar. Internationales Kolloquium über Anwendungen der Informatik und Mathematik in Architektur und Bauwesen, IKM, Weimar, 16. 2003. 20p. URL: <https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:gbv:wim2-20111215-136> (accessed 04 August 2022).
36. Meister L., Schaeben H. A concise quaternion geometry of rotations. Math. Meth. Appl. Sci., 2005. V. 28. Pp. 101–126. DOI: 10.1002/mma.560.
37. Minguzzi E. A geometrical introduction to screw theory. Eur. J. Phys., 2013. V. 34. Pp. 613–632. DOI: 10.1088/0143-0807/34/3/613.
38. Peng Du, Haibao Hu, Dong Ding, Zhuoyue Li. Understanding quaternions. NOVA Publ. 2020. 197 p.
39. Staley M. Understanding quaternions and the Dirac belt trick. Eur. J. Phys. 2010, V. 31. Pp. 467–478. DOI: 10.1088/0143-0807/31/3/004.
40. Tait P.G. An Elementary Treatise on Quaternions. Clarendon Press, 1867. 320 p.
8. Dimentberg F.M. *Teoriya vintov i ee prilozheniya* [Screw theory and its applications]. Moscow, Nauka Publ., 1978. 328 p. (in Russian)
9. Ignat'ev S.A., Muratbakeev E.H., Voronina M.V. Increasing the visibility of representation for objects studying in descriptive geometry. *Geometriya i grafika* [Geometry and Graphics]. 2022, V. 10. I. 10, pp. 44–53. DOI: 10.12737/2308-4898-2022-10-1-44-53. (in Russian)
10. Kantor I.L., Solodovnikov A.S. *Giperkompleksnye chisla* [Hypercomplex numbers]. Moscow, Nauka Publ., 1973. 144 p. (in Russian)
11. Conway J.H., Smith D. On Quaternions and Octonions. CRC Press, 2003. 159 p. (Russ. ed.: Conway J.H., Smith D. About quaternions and octaves, about their geometry, arithmetic and symmetries. Moscow, MZNM Publ., 2009. 183 p. (in Russian))
12. Korotkij V.A. Geometric modeling of a surface by mapping it to a four-dimensional space. *Omskij nauchnyy vestnik* [Omsk Scientific Bulletin]. 2015, I. 137, pp. 8–12. (in Russian)
13. Levkin Yu.S. Six-measured epure nomogram in four oktant measurement. *Geometriya i grafika* [Geometry and Graphics]. 2018, V. 6, I. 1, pp. 39–47. DOI: 10.12737/article\_5ad098b05f1559.36303938. (in Russian)
14. Lyashkov A.A., Panchuk K.L., Varepo L.G. Four-dimensional space's hypersurface mapping singularity. *Geometriya i grafika* [Geometry and Graphics]. 2017, V. 5, I. 3, pp. 3–10. DOI: 10.12737/article\_59bfa3078af4c1.45321238. (in Russian)
15. Misyura N.E., Mityushov E.A. *Kvaternionnye modeli v kinematike i dinamike tverdogo tela* [Quaternion models in kinematics and dynamics of a rigid body]. Ekaterinburg, Ural University Publ., 2020. 120 p. (in Russian)
16. Nazarova O.N. Analysis of some problems from a course on theoretical mechanics solved by descriptive geometry's methods. *Geometriya i grafika* [Geometry and Graphics]. 2019, V. 7, I. 4, pp. 76–83. DOI: 10.12737/2308-4898-2020-76-83. (in Russian)
17. Poljakova N.S., Derjabina G.S. *Kvaterniony i ih primeneniye: metodicheskie ukazaniya* [Quaternions and their application: guidelines]. Moscow, BMSTU Publ., 2003. 54 p. (in Russian)
18. Savel'ev Yu.A., Cherkasova E.Yu. Computational graphics in solving of non-traditional engineering problems. *Geometriya i grafika* [Geometry and Graphics]. 2020, V. 8, I. 1, pp. 33–44. DOI: 10.12737/2308-4898-2020-33-44. (in Russian)
19. Sadberri E. *Quaternion analysis. Giperkompleksnye chisla v geometrii i fizike* [Hypercomplex numbers in geometry and physics], 2004, V. 1, I. 2-2, pp. 130–157. (in Russian)
20. Seregin V.I., Ivanov G.S., Dmitrieva I.M., Murav'ev K.A. Interdisciplinary connections of descriptive geometry and related sections of higher mathematics. *Geometriya i grafika* [Geometry and Graphics]. 2013, V. 1, I. 3–4, pp. 8–12. (in Russian)
21. Chelnokov Yu.N. *Kvaternionnye i bikvaternionnye modeli i metody mekhaniki tverdogo tela i ih prilozheniya. Geometriya i kinematika dvizheniya* [Quaternionic and biquaternionic

## References

- models and methods of solid mechanics and their applications. Geometry and kinematics of motion]. Moscow, FIZMATLIT Publ., 2006. 512 p. (in Russian)
22. Baek J., Jean H., Kim G., Han S. Visualizing quaternion multiplication. *IEEE Access*, 2017. V. 5, pp. 8948–8955. DOI: 10.1109/ACCESS.2017.2705196.
  23. Bolker E.D. The Spinor Spanner. *The American Mathematical Monthly*. 1973, V. 80, I. 9, pp. 977–984. DOI: 10.2307/2318771.
  24. Boykov A.A. Development and application of the geometry constructions language to building computer geometric models. *Journal of Physics: Conference Series*. 2021, I. 1901. Paper ID 012058. 9 p. DOI: 10.1088/1742-6596/1901/1/012058.
  25. Demirci B.B., Aghayev N. On geometric applications of quaternions. *Turkish Journal of Mathematics*, 2020. V. 44, I. 4, Article 15. 16 p. DOI: 10.3906/mat-1907-120.
  26. Goldman R. *An Integrated Introduction to Computer Graphics and Geometric Modeling*. CRC Press, 2009. 574 p.
  27. Goldman R. Understanding quaternions. *Graph. Models*, 2011, V. 73, I. 2, pp. 21–49. DOI: 10.1016/j.gmod.2010.10.004.
  28. Hamilton W.R. *Elements of quaternions*. London, Longmans Green, 1866. 762 p.
  29. Hanson A.J. *Visualizing Quaternions*. Elsevier: Morgan Kaufmann, 2006. 536 p.
  30. Hart J.C., Francis G.K., Kauffman L.H. Visualizing quaternion rotation. *ACM Trans. Graph.*, 1994, V. 13, I. 3, pp. 256–276. DOI: 10.1145/195784.197480.
  31. Hitzer E. The orthogonal planes split of quaternions and its relation to quaternion geometry of rotations. *Journal of Physics: Conference Series*, 2015, I. 597. Paper ID 012042. 11 p. DOI: 10.1088/1742-6596/597/1/012042.
  32. Kuipers J.B. *Quaternions and Rotation Sequences: A Primer with Applications to Orbits, Aerospace and Virtual Reality*. Princeton University Press, 2002. 400 p.
  33. Malonek H.R. *Quaternions in Applied Sciences*. Bauhaus-Universität Weimar. Internationales Kolloquium über Anwendungen der Informatik und Mathematik in Architektur und Bauwesen, IKM, Weimar, 16. 2003. 20 p. URL: <https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:gbv:wim2-20111215-136> (accessed 04 August 2022).
  34. Meister L., Schaeben H. A concise quaternion geometry of rotations. *Math. Meth. Appl. Sci.*, 2005, V. 28, pp. 101–126. DOI: 10.1002/mma.560.
  35. Minguzzi E. A geometrical introduction to screw theory. *Eur. J. Phys.*, 2013, V. 34, pp. 613–632. DOI: 10.1088/0143-0807/34/3/613.
  36. Peng Du, Haibao Hu, Dong Ding, Zhuoyue Li. Understanding quaternions. *NOVA Publ.* 2020. 197 p.
  37. Staley M. Understanding quaternions and the Dirac belt trick. *Eur. J. Phys.* 2010, V. 31, pp. 467–478. DOI: 10.1088/0143-0807/31/3/004.
  38. Tait P.G. *An Elementary Treatise on Quaternions*. Clarendon Press, 1867. 320 p.